20 Rand- und Eigenwertaufgaben

Man spricht von einem Randwertproblem (RWP) für die Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

wenn die n zusätzlichen Bedingungen, die die Lösung eindeutig charakterisieren sollen, nicht wie bei einem AWP an einer einzigen Stelle, sondern an zwei Stellen $a < b$ gestellt werden, wobei die Lösung dann im Intervall $[a, b]$ gesucht wird. Wegen ihrer Bedeutung in den Anwendungen beschränken wir uns auf RWP für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

20.1 Definitionen und Beispiele

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(Ay)(x) := y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad \text{auf } [a, b] \tag{20.1}$$

mit stetigen Funktionen a_0, a_1 und f und linearen Randbedingungen (RB)

$$\begin{aligned} R_1 y &:= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \rho_1, \\ R_2 y &:= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \rho_2 \end{aligned} \tag{20.2}$$

mit vorgegebenen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \rho_1$ und ρ_2. Im Falle $\beta_1 = \beta_2 = 0$ spricht man von *Dirichlet-RB* oder *RB erster Art* und im Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ von *Neumann-RB* oder *RB zweiter Art*. Falls $\rho_1 = \rho_2 = 0$, so heißen die RB *homogen*.

Beispiel 1 Die Gleichung $y'' + y = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Zwei RB ergeben ein System von zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten c_1 und c_2, das keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben kann. Beispielsweise existiert zu den RB

- $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ genau eine Lösung: $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{\sin 1}$,
- $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ unendlich viele Lösungen: $c_1 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$,
- $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$ keine Lösung. ■

RWP sind also nicht stets lösbar, und wenn sie lösbar sind, muss die Lösung nicht eindeutig bestimmt sein.

Satz 20.1 *Seien A und f wie in (20.1) und R_1 und R_2 wie in (20.2). Weiter sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $Ay = 0$. Dann ist das inhomogenen RWP*

$$Ay = f, \quad R_1 y = \rho_1, \quad R_2 y = \rho_2 \tag{20.3}$$

genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\det\begin{pmatrix} R_1y_1 & R_1y_2 \\ R_2y_1 & R_2y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beweis Ist y_s eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $Au = f$, so läßt sich die allgemeine Lösung dieser Gleichung schreiben als

$$y = y_s + c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Das RWP (20.3) ist daher genau dann eindeutig lösbar, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} R_1y &= R_1y_s + c_1R_1y_1 + c_2R_1y_2 &= \rho_1 \\ R_2y &= R_2y_s + c_1R_2y_1 + c_2R_2y_2 &= \rho_2 \end{aligned}$$

bzw. das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1R_1y_1 + c_2R_1y_2 &= \rho_1 - R_1y_s \\ c_1R_2y_1 + c_2R_2y_2 &= \rho_2 - R_2y_s \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Determinante der Systemmatrix ungleich Null ist. ■

Wir wollen uns noch überlegen, dass man das RWP (20.3) stets auf ein RWP mit homogenen Randbedingungen zurückführen kann. Dazu wählen wir irgendeine zweimal stetig differenzierbare Funktion y^* auf $[a, b]$, die die RB erfüllt, d.h. es sei $R_1y^* = \rho_1$ und $R_2y^* = \rho_2$. Wir suchen nun die Lösung y von (20.3) in der Form $y = y^* + u$ mit einer unbekannten Funktion u. Aus

$$Ay = A(y^* + u) = Ay^* + Au = f$$

und

$$R_1y = R_1y^* + R_1u = \rho_1, \quad R_2y = R_2y^* + R_2u = \rho_2$$

folgt, dass u das RWP

$$Au = f - Ay^*, \quad R_1u = 0, \quad R_2u = 0$$

mit homogenen Randbedingungen lösen muss.

Beispielsweise erfüllt für das RWP

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

die Funktion $y^*(x) = 2x$ die Randbedingung. Aus dem Ansatz $y(x) = u(x) + 2x$ ergibt sich für u das RWP

$$u'' + u = 1 - 2x, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

20.2 Sturmsche RWP und Greensche Funktion

Eine Differentialgleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{20.4}$$

mit stetigem a_1 lässt sich stets in die Form

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = g(x) \tag{20.5}$$

(oder kurz $(py')' + qy = g$) bringen. Dazu multipliziert man (20.4) mit $p(x) := \exp\big(\int a_1(x)dx\big)$ durch und erhält

$$\exp\Big(\int a_1(x)dx\Big)y'' + a_1(x)\exp\Big(\int a_1(x)dx\Big)y' + a_0(x)p(x)y = p(x)f(x).$$

Wir setzen $q(x) := a_0(x)p(x)$ und $g(x) := f(x)p(x)$ und erhalten wegen

$$\exp\big(\int a_1(x)dx\big)y'' + a_1(x)\exp\big(\int a_1(x)dx\big)y' = p(x)y'' + p'(x)y' = \big(p(x)y'\big)'$$

die Form (20.5). Die Schreibweise (20.5) ist für viele Fragen vorteilhafter als (20.4).

Definition 20.2 *Unter einem Sturmschen Randwertproblem versteht man die Aufgabe, eine Funktion y auf $[a,b]$ zu bestimmen mit*

$$Ly := \big(p(x)y'\big)' + q(x)y = g(x), \tag{20.6}$$

die den homogenen Randbedingungen

$$R_1y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \textit{und} \quad R_2 y := \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{20.7}$$

genügt. Dabei seien p stetig differenzierbar und positiv auf $[a,b]$, q und g stetig auf $[a,b]$ und (α_1,α_2) sowie (β_1,β_2) sind nicht die Nullvektoren.

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, bedeutet die Annahme homogener RB keine wesentliche Einschränkung.

Wenn das Sturmsche Randwertproblem (20.6), (20.7) eine eindeutig bestimmte Lösung y besitzt, so kann man diese, ausgehend von einem Fundamentalsystem y_1, y_2 der homogenen Gleichung $Ly = 0$, mittels Variation der Konstanten bestimmen. Man gelangt nach einigen Rechnungen zu einer Integraldarstellung der Lösung in der Form

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)g(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

mit einer gewissen stetigen Funktion G auf $[a,b] \times [a,b]$. Wir wollen diese Rechnung nicht durchführen, sondern nur das fertige Ergebnis angeben. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Wir nehmen im weiteren an, dass das homogene Sturmsche RWP

$$Ly = 0, \quad R_1 y = 0, \quad R_2 y = 0 \tag{20.8}$$

nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitzt. Ist y_1, y_2 irgendein Fundamentalsystem von $Ly = 0$, so ist nach Satz 20.1

$$\det \begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir definieren neue Funktionen v_1, v_2 durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 y_2 & -R_1 y_1 \\ R_2 y_2 & -R_2 y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{20.9}$$

Da v_1, v_2 Linearkombinationen von y und y_2 sind, lösen sie ebenfalls die homogene Gleichung $Ly = 0$. Sie bilden sogar wieder ein Fundamentalsystem für diese Gleichung, da die Matrix in (20.9) nach Voraussetzung invertierbar ist:

$$\det \begin{pmatrix} R_1 y_2 & -R_1 y_1 \\ R_2 y_2 & -R_2 y_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 y_1 & R_1 y_2 \\ R_2 y_1 & R_2 y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Darüber hinaus erfüllen v_1 und v_2 zusätzlich die Randbedingungen

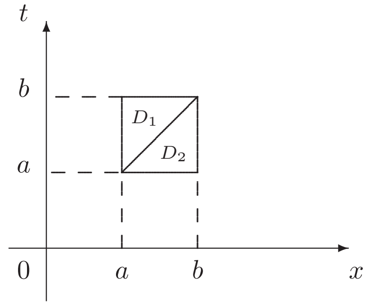
$$R_1 v_1 = 0 \quad \text{und} \quad R_2 v_2 = 0.$$

Weiter bezeichnen wir mit

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x) v_2'(x) - v_2(x) v_1'(x)$$

die zu v_1 und v_2 gehörende Wronskideterminante. Schließlich zerlegen wir das Quadrat $Q := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x, t \leq b\}$ in die beiden abgeschlossenen Dreiecke

$$D_1 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq t \leq b\}, \quad D_2 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq t \leq x \leq b\}.$$



Auf Q definieren wir eine Funktion G durch

$$G(x,t) := \begin{cases} \dfrac{v_1(x)v_2(t)}{p(a)w(a)} & \text{für } (x,t) \in D_1 \\[2ex] \dfrac{v_1(t)v_2(x)}{p(a)w(a)} & \text{für } (x,t) \in D_2. \end{cases} \tag{20.10}$$

Auf der Diagonalen $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x = t \leq b\}$ stimmen beide Definitionen offenbar überein. Die Division in (20.10) ist erlaubt, da $p(a) > 0$ nach Voraussetzung und $W(a) \neq 0$ (Wronskideterminante). Die durch (20.10) definierte Funktion heißt die *Greensche Funktion des RWP* (20.6), (20.7).

Hier sind einige Eigenschaften Greenscher Funktionen.

(E1) Die Greensche Funktion G ist auf Q stetig.

(E2) Die partiellen Ableitungen G_x und G_{xx} existieren auf jedem der Dreiecke D_1 und D_2 und sind dort stetig (auf der Diagonalen sind natürlich einseitige Ableitungen gemeint).

(E3) Es gilt die *Sprungrelation*

$$G_x(x+0,x) - G_x(x-0,x) = \frac{1}{p(x)} \quad \text{für} \quad x \in (a,b).$$

Satz 20.3 *Wir betrachten das Sturmsche RWP aus Definition 20.2 unter der Voraussetzung, dass das zugehörige homogene Problem* (20.8) *nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitzt. Weiter sei v_1, v_2 ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$ mit $R_1 v_1 = 0$ und $R_2 v_2 = 0$, und G sei die mit v_1 und v_2 wie in* (20.10) *gebildete Greensche Funktion. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung y des Sturmschen RWP* (20.6), (20.7) *gegeben durch*

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)g(t)\,dt\,, \quad x \in [a,b]. \tag{20.11}$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen unter Benutzung von (E1) - (E3), dass (20.11) tatsächlich eine Lösung ist.

Beispiel 2 Wir bestimmen die Greensche Funktion zum RWP

$$Ly := y'' + y = f(x) \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \text{ und } y(\pi) = 0.$$

Hier ist $p = q = 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Ly = 0$ ist

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Die Funktionen $y_1(x) = \cos x$ und $y_2(x) = \sin x$ bilden also ein Fundamentalsystem, und dieses erfüllt bereits

$$R_1 y_1 = y_1'(0) = 0 \quad \text{und} \quad R_2 y_2 = y_2(\pi) = 0.$$

Wir können also $v_1 = y_1$, $v_2 = y_2$ wählen und erhalten wegen

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1$$

die Greensche Funktion

$$G(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t & \text{für } 0 \le x \le t \le \pi \\ \cos t \sin x & \text{für } 0 \le t \le x \le \pi. \end{cases}$$

■

Beispiel 3 Wir wollen das RWP

$$y'' - y = 2x\,, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \tag{20.12}$$

mittels Greenscher Funktion lösen. Zunächst überführen wir (20.12) in ein RWP mit homogenen RB. Die Funktion $y^*(x) = x$ erfüllt die RB. Mit dem Ansatz $y(x) = u(x) + y^*(x) = u(x) + x$ gelangen wir zum RWP

$$u'' - u = 3x, \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{20.13}$$

für u. Dieses hat bereits die Form eines Sturmschen RWP mit $p = 1$. Die homogene Gleichung $u'' - u = 0$ hat $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{-x}$ als Fundamentalsystem. Wir benötigen aber ein Fundamentalsystem v_1, v_2 mit $v_1(0) = 0$ und $v_2(1) = 0$. Dieses können wir erraten oder wie in (20.9) errechnen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_1 u_2 & -R_1 u_1 \\ R_2 u_2 & -R_2 u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{-1} & e^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^x - e^{-x} \\ e^{x-1} - e^{1-x} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sinh x \\ \sinh(x-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir rechnen weiter mit

$$v_1(x) = \sinh x \quad \text{und} \quad v_2(x) = \sinh(x-1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} \sinh x & \sinh(x-1) \\ \cosh x & \cosh(x-1) \end{pmatrix} \\ &= \sinh x \cosh(x-1) - \sinh(x-1) \cosh x = \sinh 1 \end{aligned}$$

und daher

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{\sinh x \sinh(t-1)}{\sinh 1} & \text{für } 0 \le x \le t \le 1 \\ \frac{\sinh t \sinh(x-1)}{\sinh 1} & \text{für } 0 \le t \le x \le 1. \end{cases}$$

Für die Lösung u des RWP erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x,t)g(t)\,dt = 3\int_0^1 G(x,t)\cdot t\,dt \\ &= 3\int_0^x \frac{\sinh t}{\sinh 1}\sinh(x-1)t\,dt + 3\int_x^1 \frac{\sinh x}{\sinh 1}\sinh(t-1)t\,dt \\ &= 3\,\frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}\int_0^x t\sinh t\,dt + 3\,\frac{\sinh x}{\sinh 1}\int_x^1 t\sinh(t-1)\,dt \\ &= 3\left(\frac{\sinh x}{\sinh 1} - x\right) \end{aligned}$$

(die Ausführung der partiellen Integration ist Hausaufgabe). Schließlich ist

$$y(x) = u(x) + y^*(x) = 3\,\frac{\sinh x}{\sinh 1} - 2x$$

die Lösung des Ausgangs-RWP. ■

20.3 Die Wellengleichung

Eine Quelle für RWP und für Eigenwertaufgaben sind Separationsansätze für partielle Differentialgleichungen, von denen wir uns exemplarisch zwei ansehen. Weitere Beispiele (Eulersche Knicklast, Poisson-Gleichung) finden Sie im Arbeitsbuch Teil 2.

Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit einer Konstanten } a > 0 \tag{20.14}$$

für eine Funktion u, die von der „Zeit“ t und dem „Ort“ x abhängt, heißt *eindimensionale Wellengleichung*. Zusammen mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t \tag{20.15}$$

beschreibt sie z.B. eine schwingende Saite, die an den Punkten 0 und π fest eingespannt ist. Wir suchen Lösungen von (20.14), (20.15) in der Form

$$u(x,t) = v(x)w(t) \tag{20.16}$$

mit zu bestimmenden Funktionen v und w, die jeweils nur von einer der Veränderlichen abhängen. Ein solcher Ansatz heißt *Separationsansatz*. Wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(x)w(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x)\ddot{w}(t)$$

erhalten wir aus (20.15) $v(x)\ddot{w}(t) = a^2 v''(x) w(t)$ und somit

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = a^2 \frac{v''(x)}{v(x)}. \tag{20.17}$$

Links steht eine Funktion von t, und rechts eine von x. Die Gleichheit (20.17) kann daher nur bestehen, wenn beide Seiten konstant sind, d.h. wenn es eine *Separationskonstante* λ mit

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = -a^2\lambda \quad \text{und} \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

bzw. mit

$$\ddot{w}(t) + a^2\lambda w(t) = 0 \quad \text{und} \quad v''(x) + \lambda\, v(x) = 0$$

gibt. Nun kommen noch die RB ins Spiel. Sie lauten $v(0)w(t) = v(\pi)w(t) = 0$ für alle t. Schließen wir den physikalisch uninteressanten Fall der ruhenden Saite (mit $w(t) = 0$ für alle t) aus, so erhalten wir $v(0) = v(\pi) = 0$. Die Funktion v muss also das RWP

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{20.18}$$

lösen. Natürlich ist $v \equiv 0$ eine Lösung; wir benötigen aber nichttriviale Lösungen von (20.18), um hieraus nichttriviale Lösungen der Wellengleichung zu gewinnen. Nichttriviale Lösungen gibt es nicht für alle Werte des Parameters λ. Gibt es für ein λ eine nichttriviale Lösung von (20.18), so heißt λ ein *Eigenwert* und die Lösung eine zugehörige *Eigenfunktion* von (20.18).
Wir suchen also nichttriviale Lösungen von (20.18). Das charakteristische Polynom $x^2 + \lambda = 0$ hat die Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1: $\lambda < 0$. Dann haben wir zwei einfache reelle Nullstellen $x_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda|}$ des charakteristischen Polynoms, und die Funktionen

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}$$

bilden die allgemeine Lösung von $v'' + \lambda v = 0$. Um die RB zu erfüllen, muss

$$\begin{aligned} v(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ v(\pi) &= c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} = 0 \end{aligned}$$

sein. Dieses Gleichungssystem hat wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}\pi} & e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{|\lambda|}\pi} - e^{\sqrt{|\lambda|}\pi} \neq 0$$

nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = 0$. Also ist $v(x) = 0$ für alle x.

Fall 2: $\lambda = 0$. Dann ist 0 eine doppelte Nullstelle und

$$v(x) = c_1 + c_2 x$$

die allgemeine Lösung von $v'' + \lambda v = 0$. Wie in Fall 1 erhält man, dass nur die Funktion $v \equiv 0$ (mit $c_1 = c_2 = 0$) die RB erfüllt.

Fall 3: $\lambda > 0$. Dann sind $\pm i\sqrt{\lambda}$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und die allgemeine Lösung v von $v'' + \lambda v = 0$ ist

$$v(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Die RB lauten nun

$$\begin{aligned} v(0) &= c_1 = 0, \\ v(\pi) &= c_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0. \end{aligned}$$

Damit nichttriviale Lösungen existieren, muss $\sqrt{\lambda}\pi$ eine Nullstelle des Sinus sein. Also ist $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ bzw. $\lambda = n^2$. Die Quadratzahlen sind also die Eigenwerte von (20.18), und die Funktionen

$$v_n(x) = c \sin nx$$

sind die zugehörigen Eigenfunktionen.
Nun müssen wir noch die Differentialgleichung $\ddot{w}(t) + a^2 n^2 w(t) = 0$ lösen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$w_n(t) = c_1 \cos ant + c_2 \sin ant,$$

so dass schließlich jede der Funktionen

$$u_n(x,t) = \sin nx (A_n \cos ant + B_n \sin ant), \quad n \in \mathbb{N} \tag{20.19}$$

eine Lösung der Wellengleichung ist.

Insbesondere sehen wir, dass die Lösung der Wellengleichung (20.14) durch die Randbedingung (20.15) noch nicht eindeutig festgelegt ist. Vielmehr haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung u_n gefunden, und auch alle Linearkombinationen der Funktionen (20.19) lösen (20.14) mit (20.15). Die Eindeutigkeit der Lösung kann man erzwingen, wenn man zusätzlich zu den RB (20.15) noch *Anfangsbedingungen*

$$u(x,0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \tag{20.20}$$

auf $[0,\pi]$ mit geeigneten Funktionen g und h vorgibt.

Man sucht dann eine Lösung u der Wellengleichung (20.14) mit den RB (20.15) in der Form einer unendlichen Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx (A_n \cos ant + B_n \sin ant)$$

und versucht, die Koeffizienten A_n und B_n so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingungen (20.20) erfüllt sind. In unserem Fall führt das auf

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = g(x)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} anB_n \sin nx = h(x).$$

Wir stoßen also auf das Problem, willkürliche Funktionen g und h nach den Eigenfunktionen eines RWP zu entwickeln. Im vorliegenden Fall sind diese Eigenfunktionen Sinusfunktionen. Zuständig hierfür ist die Theorie der Fourierreihen, die wir in Abschnitt 12.4 kennen gelernt haben.

20.4 Die Wärmeleitgleichung

Die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit } a > 0 \tag{20.21}$$

heißt *eindimensionale Wärmeleitgleichung*. Sie beschreibt z.B. die Temperaturverteilung in einem Stab (vgl. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 221-222). Wir betrachten sie zusammen mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) + \delta u(\ell,t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0 \tag{20.22}$$

mit einem Materialparameter $\delta > 0$ und mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{für } x \in [0,\ell]. \tag{20.23}$$

Zunächst betrachten wir das RWP (20.21) mit (20.22). Ein Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ führt wie in Abschnitt 20.3 auf das RWP

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(\ell) + \delta v(\ell) = 0 \tag{20.24}$$

für v und die Differentialgleichung $\dot{w} + a^2\lambda w = 0$ für w. Man kann sich wieder davon überzeugen, dass das RWP (20.24) nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen besitzen kann. In diesem Fall ist wieder

$$v(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung von $v'' + \lambda v = 0$. Um die RB zu befriedigen, muss

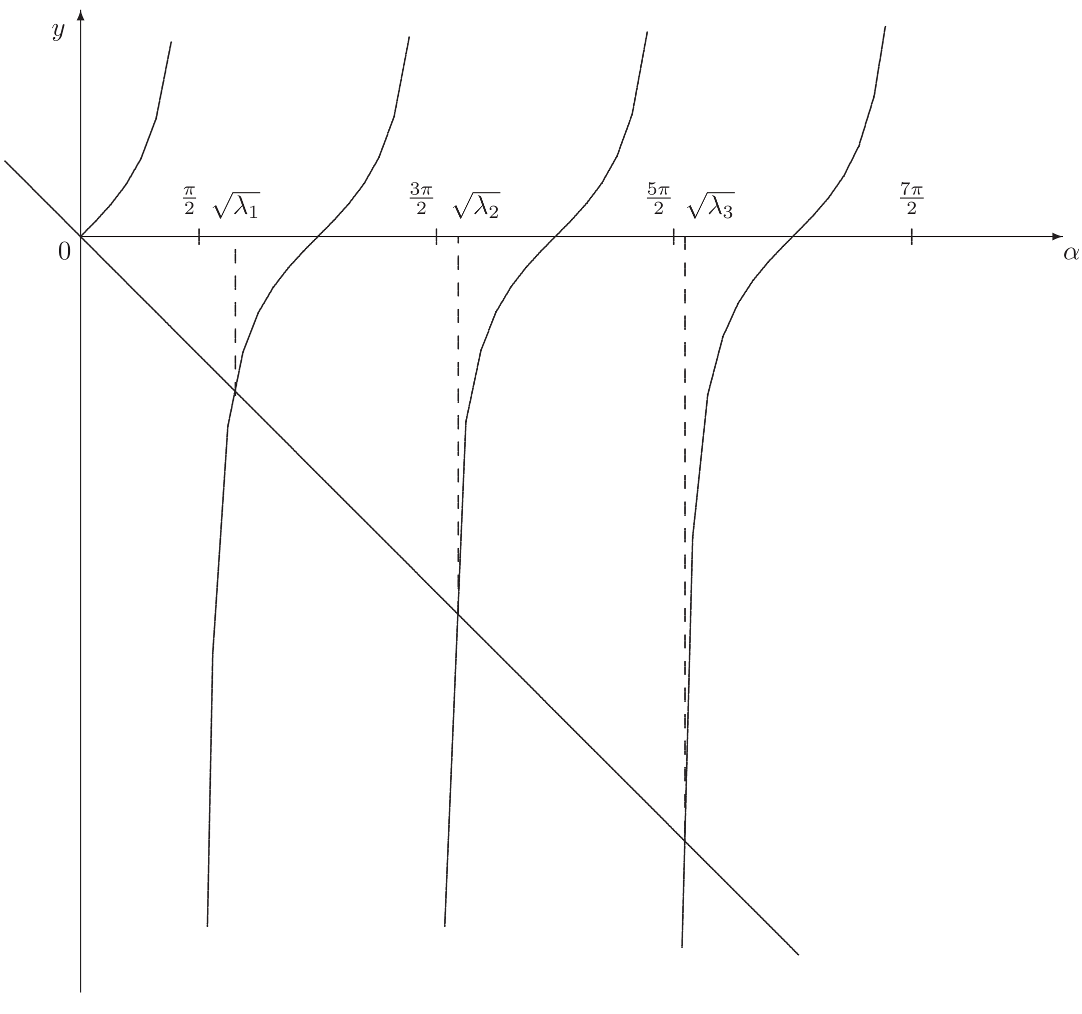
$$v(0) = c_1 = 0$$

$$\text{und} \quad v'(\ell) + \delta v(\ell) = c_2(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\ell + \delta\sin\sqrt{\lambda}\ell) = 0$$

sein. Damit wir $c_2 \neq 0$ wählen können, muss also

$$\tan\sqrt{\lambda}\ell = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\delta} \tag{20.25}$$

sein. Die direkte Lösung dieser Gleichung scheitert. Man kann sich aber überlegen, dass sie unendlich viele positive Lösungen $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ mit $\lambda_n \to \infty$ besitzt. Wählen wir z.B. $\ell = \delta = 1$ und setzen $\sqrt{\lambda} = \alpha$, so haben wir statt (20.25) die Gleichung $\tan\alpha = -\alpha$, deren Lösungen sich graphisch veranschaulichen lassen:



Näherungsweise gilt $\lambda_1 = 4,11587$, $\lambda_2 = 24,13934$, $\lambda_3 = 63,65917$. Wir erhalten also wieder eine unendliche Folge von Eigenwerten λ_n mit zugehörigen Eigenfunktionen $v_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$. Die Bestimmung des zweiten Faktors w aus der Differentialgleichung $\dot{w} + a^2\lambda_n w = 0$ ist nun einfach und liefert

$$w_n(t) = c_n e^{-a^2\lambda_n t},$$

so dass schließlich jede der Funktionen

$$u_n(x,t) = c_n \sin\sqrt{\lambda_n}x e^{-a^2\lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

das RWP (20.21), (20.22) löst.

Nun versuchen wir, auch die Anfangsbedingung (20.23) zu erfüllen. Dazu wählen wir als Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\sqrt{\lambda_n}x e^{-a^2\lambda_n t}$$

und versuchen, die Koeffizienten c_n so zu bestimmen, dass

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\sqrt{\lambda_n}x = f(x).$$

Wieder stehen wir vor dem Problem, eine Funktion f nach den Eigenfunktionen eines RWP zu entwickeln. Diesmal hilft uns aber der Hinweis auf die klassischen Fourierreihen nicht weiter. Man kann aber zeigen, das sich die Funktionen

$$e_n(x) := \sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

in vielerlei Hinsicht ähnlich verhalten wie die für die Fourierreihen wichtigen Funktionen $\sin nx$. Z.B. gilt wieder eine Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{\ell} e_m(x)e_n(x)\,dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n.$$

Dies führt uns bereits in die allgemeine Theorie der orthogonalen oder Fourierreihen. Wer sich hiermit weiter beschäftigen möchte, dem werden die Vorlesungen „Elementare partielle Differentialgleichungen“ und „Funktionalanalysis und Integralgleichungen“ empfohlen.