16 Oberflächenintegrale

Nachdem wir im vergangenen Abschnitt gesehen haben, wie man das Volumen eines dreidimensionalen Körpers (z.B. das Volumen einer Kugel) mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen kann, wenden wir uns nun den Flächeninhalten gekrümmter Flächen zu (wie z.B. der Oberfläche einer Kugel), für die wir einen geeigneten Integralbegriff entwickeln.

16.1 Flächen, Tangenten und Normalen

Wir haben früher Kurven als Bilder von Intervallen bzgl. stetiger Abbildungen beschrieben. Ganz analog definieren wir nun Flächenstücke als Bilder ebener Bereiche bzgl. geeigneter Abbildungen.

Definition 16.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte offene Menge, und ihre Abschließung $\overline{D}$ sei Jordan-messbar. Weiter sei $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion mit*

$$\operatorname{rang} F'(x_1, x_2) = 2 \quad \textit{für alle } (x_1, x_2) \in D. \tag{16.1}$$

Dann heißt das Bild von $\overline{D}$ unter F, d.h. die Menge

$$\mathcal{F} := \{F(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, x_2) \in D\} \tag{16.2}$$

ein Flächenstück *im $\mathbb{R}^3$ und die Abbildung $F : \overline{D} \to \mathcal{F}$ heißt eine* Parameterdarstellung des Flächenstücks *$\mathcal{F}$ oder kurz eine* Fläche.

Genau wie bei Wegen und Kurven unterscheiden wir wieder sorgfältig zwischen der Abbildung F und ihrem Bild $\mathcal{F}$. Offenbar kann es für ein- und dasselbe Flächenstück $\mathcal{F}$ verschiedene Parametrisierungen geben.

Wichtige Vereinbarung. Wir haben früher die Differenzierbarkeit einer Abbildung $F : X \to \mathbb{R}^3$ nur für offene Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ erklärt. Die stetige Differenzierbarkeit von $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ haben wir wie folgt zu verstehen: *Die Funktion F läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion $F : G \to \mathbb{R}^3$ auf eine offene Menge $G \supset \overline{D}$ fortsetzen.* Diese Menge G ist für die Definition des Flächenstücks offenbar unerheblich. Wir möchten jedoch auch in den Randpunkten von D die partiellen Ableitungen F_{x_1} und F_{x_2} bilden können und verlangen daher, dass sich F auf eine offene Umgebung G von $\overline{D}$ stetig differenzierbar fortsetzen läßt. ■

Die Rangbedingung (16.1) wird nur für Punkte aus D gefordert; auf dem Rand $\partial D = \overline{D} \backslash D$ muss sie nicht erfüllt sein. Mit

$$F(x_1, x_2) = \big(F_1(x_1, x_2),\ F_2(x_1, x_2),\ F_3(x_1, x_2)\big)^T$$

lautet die Rangbedingung (16.1)

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\end{pmatrix} = 2 \tag{16.3}$$

in allen Punkten von D.

Beispiel 1 Sei $D = (0, 2\pi) \times (-\pi/2,\, \pi/2)$. Dann ist $\overline{D}$ das Rechteck $[0, 2\pi] \times [-\pi/2,\, \pi/2]$. Sei weiter $r > 0$ und

$$F(u, v) := (r\cos u\cos v,\; r\sin u\cos v,\; r\sin v)^T$$

für $(u, v) \in \overline{D}$. Dann ist F stetig differenzierbar auf $\overline{D}$ (und sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$), und die Funktionalmatrix

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix}-r\sin u\cos v & -r\cos u\sin v\\ r\cos u\cos v & -r\sin u\sin v\\ 0 & r\cos v\end{pmatrix}$$

hat für alle $(u, v) \in D$ den Rang 2. Das zugehörige Flächenstück $\mathcal{F}$ ist die Oberfläche einer Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius r. ■

Beispiel 2 Sei $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) := \big(u, v,\; f(u, v)\big)^T.$$

Dann ist auch F stetig differenzierbar auf $\overline{D}$, und die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}$$

von F hat offenbar den Rang 2. Das durch F definierte Flächenstück ist gerade der Graph von f. Mit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ und $f(u, v) = uv$ erhält man beispielsweise eine Sattelfläche (hyperbolisches Paraboloid). ■

Beispiel 3 Seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ linear unabhängige Vektoren und sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Auf $\overline{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ hat die Funktion $F(u, v) = u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{x}_0$ die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{pmatrix},$$

die wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Rang 2 hat. Das zugehörige Flächenstück ist ein Teil der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten und durch $\vec{x}_0$ verlaufenden Ebene. ■

Sei $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines Flächenstücks $\mathcal{F}$. Ist durch $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \to \overline{D}$ ein stetig differenzierbarer Weg in $\overline{D}$ gegeben, so ist

$$Y : [a, b] \to \mathbb{R}^3, \quad Y(t) = F\big(X(t)\big)$$

ein stetig differenzierbarer Weg, der komplett in $\mathcal{F}$ verläuft. Für $t_0 \in [a, b]$ wird die Richtung der Tangente an den Weg Y im Punkt $Y(t_0) = F\big(X(t_0)\big)$ beschrieben durch den Vektor

$$\dot{Y}(t_0) = F_u\big(X(t_0)\big)\dot{X}_1(t_0) + F_v\big(X(t_0)\big)\dot{X}_2(t_0) \tag{16.4}$$

(Kettenregel!) mit

$$F_u\big(X(t_0)\big) = \frac{\partial F}{\partial u}\left(X(t_0)\right) = \Big(\frac{\partial F_1}{\partial u}\left(X(t_0)\right), \frac{\partial F_2}{\partial u}\left(X(t_0)\right), \frac{\partial F_3}{\partial u}\left(X(t_0)\right)\Big)$$

und

$$F_v\big(X(t_0)\big) = \frac{\partial F}{\partial v}\big(X(t_0)\big) = \Big(\frac{\partial F_1}{\partial v}\left(X(t_0)\right), \frac{\partial F_2}{\partial v}\left(X(t_0)\right), \frac{\partial F_3}{\partial v}\left(X(t_0)\right)\Big).$$

Die Rangbedingung (16.1) besagt gerade, dass die beiden Vektoren $F_u\big(X(t_0)\big)$ und $F_v\big(X(t_0)\big)$ für alle Punkte $X(t_0) \in D$ linear unabhängig sind. Wir schreiben $X(t_0) = (u_0, v_0)$. Betrachten wir alle Wege X durch den Punkt (u_0, v_0), so können in (16.4) die Ableitungen $\dot{X}_1$ und $\dot{X}_2$ beliebige Werte annehmen. Die beiden Vektoren $F_u(u_0, v_0)$ und $F_v(u_0, v_0)$ spannen also die komplette *Tangentialebene an die Fläche F im Punkt* $F(u_0, v_0)$ auf. Eine Beschreibung der Tangentialebene in Parameterform lautet

$$\{F(u_0, v_0) + \lambda F_u(u_0, v_0) + \mu F_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \tag{16.5}$$

Den *Normalenvektor an die Fläche $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ im Punkt* $F(u, v)$ mit $(u, v) \in D$ erklären wir durch das Vektorprodukt

$$N(u, v) := \frac{F_u(u, v) \times F_v(u, v)}{\|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|}\,. \tag{16.6}$$

(Man beachte, dass $F_u(u, v) \times F_v(u, v) \neq 0$ ist, da beide Vektoren linear unabhängig sind.) Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts wissen wir, dass der Vektor $N(u, v)$ senkrecht auf $F_u(u, v)$ und $F_v(u, v)$ (und damit auf der gesamten Tangentialebene (16.5)) steht. Außerdem hat er die Länge 1, so dass man auch vom *Normaleneinheitsvektor* spricht.

Es stellt sich die Frage, inwieweit die eingeführten Begriffe (Tangential- und Normalenvektoren) von der Parametrisierung F oder nur vom Flächenstück $\mathcal{F}$ abhängen. Dazu zunächst eine Definition.

Definition 16.2 a) *Seien D, E offen in $\mathbb{R}^2$. Eine bijektive Abbildung $\varphi : \overline{D} \to \overline{D}$ heißt* Diffeomorphismus*, wenn φ und die Umkehrabbildung φ^{-1} stetig differenzierbar sind.*

b) *Zwei Parameterdarstellungen $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ und $G : \overline{E} \to \mathbb{R}^3$ heißen* äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : \overline{D} \to \overline{E}$ gibt mit $F = G \circ \varphi$ und* $\det \varphi' > 0$ *auf $\overline{D}$.*

Sind F und G äquivalent, so sagt man auch, dass sie durch eine Parametertransformation φ auseinander hervorgehen.

Bei äquivalenten Parametertransformationen bleiben die wesentlichen Flächengrößen und Flächeneigenschaften (wie die Tangentialebenen und Normalenvektoren) unverändert.

Beispiel 4 Seien D und F wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Dann ist

$$\begin{aligned}
F_u(u,v) &= (-r \sin u \cos v,\ r \cos u \cos v, 0)^T, \\
F_v(u,v) &= (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)^T, \\
F_u(u,v) \times F_v(u,v) &= (r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin v \cos v)^T, \\
\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| &= r^2 \cos v
\end{aligned}$$

und damit

$$N(u,v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)^T$$

für alle Punkte $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$. ■

Beispiel 5 Sind D, f und F wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$F_u = \big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\big)^T, \qquad F_v = \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\big)^T,$$

$$F_u \times F_v = \big(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\big)^T, \qquad \|F_u \times F_v\| = \sqrt{\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2 + 1}$$

und damit schließlich

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2 + 1}} \big(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\big)^T. \qquad ■$$

Beispiel 6 Sei $D = E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$. Die Parametrisierungen

$$F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3, \quad F(u,v) = (u, v, uv)^T$$

und

$$G : \overline{E} \to \mathbb{R}^3, \quad G(u,v) = (u, -v, -uv)^T$$

liefern das gleiche Flächenstück. Wir bestimmen die Normalenvektoren im Punkt $F(0,0) = G(0,0) = (0,0,0)^T$. Zunächst ist

$$F_u(u,v) = (1,0,v)^T, \quad F_v(u,v) = (0,1,u)^T,$$

also

$$F_u(u,v) \times F_v(u,v) = (-v,-u,1)^T \text{ und } F_u(0,0) \times F_v(0,0) = (0,0,1)^T,$$

und andererseits ist

$$G_u(u,v) = (1,0,-v)^T, \quad G_v(u,v) = (0,-1,-u)^T$$

und damit

$$G_u(u,v) \times G_v(u,v) = (-v,u,-1)^T \text{ und } G_u(0,0) \times G_v(0,0) = (0,0,-1)^T.$$

Bei Verwendung von F erhalten wir also $(0,0,1)^T$ als Normaleneinheitsvektor im Punkt $(0,0,0)^T$ an die Sattelfläche, und bei Verwendung von G den Vektor $(0,0,-1)^T$. Man beachte, dass zwar F und G durch den Diffeomorphismus

$$\varphi : \overline{D} \to \vec{E},\ (u,v)^T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u,-v)^T$$

auseinander hervorgehen, dass aber

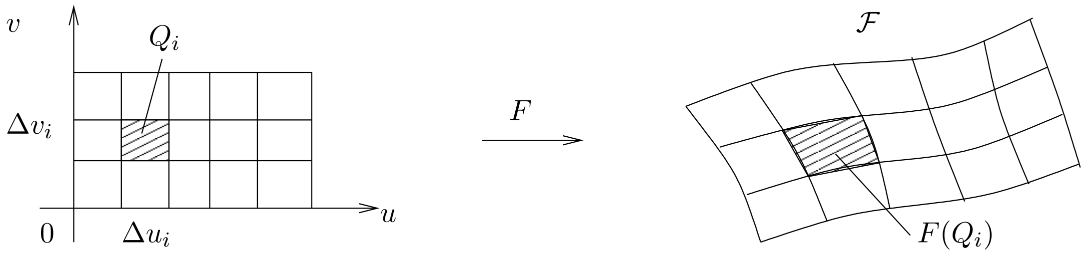
$$\det \varphi'(u,v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

ist. Also sind F und G nicht zueinander äquivalent. ■

Anschaulich ist klar, dass jedes Flächenstück in jedem Punkt genau einen Tangentialraum, aber zwei Normaleneinheitsvektoren (nach „oben“ und nach „unten“) besitzt. Ist $F = G \circ \varphi$, so liefern F und G den gleichen Normalenvektor, wenn $\det \varphi' > 0$, und sie liefern entgegengesetzte Normalenvektoren, wenn $\det \varphi' < 0$. In letzterem Fall sagt man auch, dass die *Orientierung* von F gewechselt wird.

16.2 Flächenintegrale

Wir wollen nun Flächenintegrale bestimmen. Als Motivation gehen wir ähnlich vor wie bei der „Herleitung“ der Substitutionsregel in Abschnitt 15.4. Sei $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung eines Flächenstückes $\mathcal{F}$, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass $\overline{D}$ ein achsenparalleles Rechteck in der uv-Ebene ist. Das Rechteck $\overline{D}$ sei in Teilrechtecke $Q_1, \ldots, Q_m$ zerlegt. Ihre Bilder $F(Q_1), \ldots, F(Q_m)$ nennen wir *Maschen*. Aus diesen Maschen setzt sich das Flächenstück $\mathcal{F}$ zusammen.



Ist die Rechteckzerlegung von $\overline{D}$ fein genug, so haben die Maschen nahezu die Gestalt eines Parallelogramms. Ist Q_i ein Teilrechteck in $\overline{D}$ mit den Seitenlängen Δu_i und Δv_i und ist (u_i, v_i) der linke untere Eckpunkt von Q_i, so ist die Masche $F(Q_i)$ ungefähr gleich dem Parallelogramm, das von den Vektoren

$$F(u_i + \Delta u_i, v_i) - F(u_i, v_i) \text{ und } F_v(u_i, v_i + \Delta v_i) - F(u_i, v_i)$$

aufgespannt wird. Diese Vektoren sind nach Definition der partiellen Ableitungen ungefähr gleich

$$F_u(u_i, v_i)\Delta u_i \quad \text{und} \quad F_v(u_i, v_i)\Delta v_i.$$

Diese beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt gleich der Länge des Vektorprodukts dieser Vektoren ist, also gleich der Länge von

$$\Delta\sigma_i := \big(F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)\big)\ \Delta u_i \Delta v_i.$$

Man kann daher $\|\Delta\sigma_i\|$ als ungefähren Flächeninhalt der Masche $F(Q_i)$ ansehen und

$$\sum_{i=1}^{m} \|\Delta\sigma_i\| = \sum_{i=1}^{m} \|F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)\|\ \Delta u_i \Delta v_i \tag{16.7}$$

als Näherung für den Flächeninhalt des Flächenstückes $\mathcal{F}$. Ist D kein Rechteck, so schöpfen wir $\overline{D}$ von innen durch rechteckzerlegte Bereiche aus. Lassen wir auf der rechten Seite von (16.7) die Zerlegung immer feiner werden, d.h. lassen wir $\max_i\{\Delta u_i, \Delta v_i\}$ gegen 0 streben, so gelangen wir zum Integral

$$\iint_{\overline{D}} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|\, d(u, v).$$

Um sicherzustellen, dass dies tatsächlich dem Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ entspricht, müssen wir noch (ähnlich wie bei Kurven) garantieren, dass nicht Teile des Flächenstücks mehrfach durchlaufen werden.

Definition 16.3 *Die Parameterdarstellung $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ und das durch sie definierte Flächenstück heißen* doppelpunktfrei, *wenn F auf D eineindeutig ist.*

Definition 16.4 *Ist $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ eine doppelpunktfreie Parameterdarstellung eines Flächenstückes $\mathcal{F}$, so ist der* Flächeninhalt *von $\mathcal{F}$ die Zahl*

$$I(\mathcal{F}) = \iint\limits_{\overline{D}} \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \; d(u,v) \tag{16.8}$$

Das Integral in (16.8) schreibt man auch als $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$, wobei $d\sigma$ symbolisch für

$$\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \; d(u,v)$$

steht und *Flächenelement* heißt. Definition 16.4 wird wie folgt verallgemeinert:

Definition 16.5 *Durch $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück $\mathcal{F}$ gegeben, und $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $\mathcal{F}$. Dann heißt das Integral*

$$\iint\limits_{\overline{D}} H\big(F(u,v)\big) \, \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \, d(u,v) = \int_{\mathcal{F}} H \, d\sigma \tag{16.9}$$

das Flächenintegral von H über $\mathcal{F}$ *(manchmal auch* Flächenintegral erster Art*).*

Als Motivation kann man sich ein elektrostatisch geladenes Flächenstück $\mathcal{F}$ vorstellen, wobei die Ladungsdichte H in jedem Punkt von $\mathcal{F}$ bekannt und die Gesamtladung gesucht ist.
Man kann (und muss) sich überlegen, dass die Integrale in (16.8) und (16.9) bei Parametertransformation und Orientierungswechsel invariant bleiben. Im Falle der Doppelpunktfreiheit ist die Schreibweise rechts in (16.9) völlig eindeutig, da je zwei zugehörige Parameterdarstellungen entweder äquivalent oder entgegengesetzt orientiert sind.

Beispiel 7 Seien D und F wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Mit Beispiel 4 erhalten wir

$$I(\mathcal{F}) = \iint\limits_{\overline{D}} r^2 \cos v \, d(u,v) = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv \, du = 4\pi r^2$$

als Flächeninhalt der Kugeloberfläche. ■

Beispiel 8 Sind D, f und F wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$I(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} d\sigma = \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \; d(u,v)$$

der Flächeninhalt des Funktionsgraphen. Vergleichen Sie dieses Resultat mit Formel (14.2) für die Kurvenlänge des Graphen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. ■

Definition 16.6 *Durch $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück $\mathcal{F}$ gegeben, und $H : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ sei ein stetiges Vektorfeld auf $\mathcal{F}$. Dann heißt*

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} := \iint\limits_{\overline{D}} H\big(F(u,v)\big) \cdot \big(F_u(u,v) \times F_v(u,v)\big)\, d(u,v) \tag{16.10}$$

das Flächenintegral (zweiter Art) von H über $\mathcal{F}$.

Schreiben wir

$$\begin{aligned} F_u(u,v) \times F_v(u,v) &= \frac{F_u(u,v) \times F_v(u,v)}{\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\|} \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\| \\ &= N(u,v)\|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\|, \end{aligned}$$

so geht das Integral auf der rechten Seite von (16.10) über in

$$\iint\limits_{\overline{D}} H\big(F(u,v)\big) \cdot N(u,v)\, \|F_u(u,v) \times F_v(u,v)\|\, d(u,v), \tag{16.11}$$

so dass man das Integral $\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma}$ zweiter Art auch als das Integral $\int_{\mathcal{F}} H \cdot N\, d\sigma$ erster Art auffassen kann. Flächenintegrale zweiter Art sind ebenfalls invariant bezüglich äquivalenter Parametertransformationen. Bei einem Orientierungswechsel ändern sie jedoch ihr Vorzeichen, da die Normalenvektoren ihre Richtung ändern.

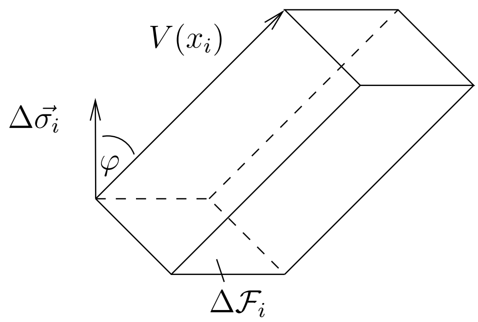
Zur *Motivation* der Flächenintegrale zweiter Art stellen wir uns ein stationäres (zeitunabhängiges) Geschwindigkeitsfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ einer strömenden Flüssigkeit vor und fragen nach der Flüssigkeitsmenge, die ein gegebenes Flächenstück $\mathcal{F}$ pro Zeiteinheit durchfließt. Sinnvollerweise soll $\mathcal{F}$ orientiert sein, d.h. wir können uns etwa vorstellen, dass $\mathcal{F}$ eine "Unterseite" und eine "Oberseite" hat und dass die Normalenvektoren in Richtung der Oberseite zeigen.

Wie bei der Motivation zum Flächeninhalt denken wir uns $\mathcal{F}$ in Maschen unterteilt, die näherungsweise Parallelogrammform haben. Es sei $\Delta\vec{\sigma}_i$ der *Flächenvektor* eines solchen Parallelogramms $\Delta\mathcal{F}_i$, d.h. $\Delta\vec{\sigma}_i$ steht senkrecht auf $\Delta\mathcal{F}_i$ und zeigt in Normalenrichtung, und $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$ ist gleich dem Flächeninhalt von $\Delta\mathcal{F}_i$.

Dann ist $|V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i|$ (mit einem $x_i \in \Delta\mathcal{F}_i$) das Flüssigkeitsvolumen, das näherungsweise pro Zeiteinheit durch $\Delta\mathcal{F}_i$ fließt. Pro Zeiteinheit schiebt sich nämlich ein Parallelflach mit dem Grundflächeninhalt $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$ und der Höhe $\|V(x_i)\| \cos\varphi$ (vgl. die folgende Skizze), d.h. mit dem Volumen

$$\|V(x_i)\|\, \|\Delta\vec{\sigma}_i\| \cos\varphi = V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$$

durch $\Delta\mathcal{F}_i$. (In erster Näherung nehmen wir V als konstant auf $\Delta\mathcal{F}_i$ an.)



Fließt die Flüssigkeit aus der Seite von $\Delta\mathcal{F}_i$ heraus, in die der Flächenvektor $\Delta\vec{\sigma}_i$ zeigt, so ist $V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i \geq 0$ und andernfalls ≤ 0. Das Vorzeichen von $V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$ gibt also an, in welche Richtung $\Delta\mathcal{F}_i$ durchflossen wird. Die Summation der Durchflüsse über alle Maschen

$$\sum_i V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$$

und der Übergang zu beliebig kleinen Maschenweiten führen zum Flächenintegral 2. Art

$$U = \int_{\mathcal{F}} V(x) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Die Größe $|U|$ gibt also das Gesamtvolumen an, das pro Zeiteinheit das Flächenstück $\mathcal{F}$ durchströmt, wobei die Anteile beider Strömungsrichtungen durch $\mathcal{F}$ gegeneinander aufgerechnet sind. Das Vorzeichen von U gibt an, an welcher Seite des Flächenstücks mehr herausfließt: Ist $U > 0$, so strömt mehr Flüssigkeit in Richtung der Normalenvektoren von $\mathcal{F}$, ist $U < 0$, so in entgegengesetzter Richtung. Man nennt U auch den *Fluss* von V durch $\mathcal{F}$. ∎

Beispiel 9 Seien D und F wieder wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche), und sei $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die identische Abbildung, d.h. $H(x, y, z) = (x, y, z)$. Dann ist nach Beispiel 4

$$N(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

und mit

$$H\big(F(u, v)\big) = F(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v) = r\,N(u, v)$$

erhalten wir mit (16.11) für das Flächenintegral 2. Art

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{F}} H \cdot N\,d\sigma = \int_{\mathcal{F}} r\,d\sigma = r \int_{\mathcal{F}} d\sigma.$$

Das Flächenintegral $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$ ist gleich dem Flächeninhalt der Kugeloberfläche. Wir haben es in Beispiel 7 berechnet und erhalten damit

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi r^3.$$ ∎