

Mathematik III für ETiT, WI(ET), SpInf

Steffen Roch

WS 2008/09

Das folgende Inhaltsverzeichnis umfasst Mathematik I bis III

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen	1
1.1	Die natürlichen Zahlen	1
1.2	Die reellen Zahlen	3
1.3	Die komplexen Zahlen	8
2	Folgen und Reihen reeller Zahlen	14
2.1	Folgen und Grenzwerte	14
2.2	Konvergenzkriterien und Vollständigkeit von \mathbb{R}	18
2.3	Reihen	21
2.4	Absolut konvergente Reihen	23
3	Reelle Funktionen und Stetigkeit	27
3.1	Mengen und Mengenoperationen	27
3.2	Abbildungen	29
3.3	Stetige Funktionen	31
3.4	Einige spezielle Funktionen	35
3.4.1	Polynome	35
3.4.2	Wurzelfunktionen	36
3.4.3	Trigonometrische Funktionen	37
3.4.4	Exponentialfunktion	41
3.5	Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen	43
4	Differentialrechnung	46
4.1	Definition der Ableitung	46
4.2	Differentiationsregeln	48
4.3	Ableitungen spezieller Funktionen	50
4.3.1	Polynome und rationale Funktionen	50
4.3.2	Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen	51
4.3.3	Trigonometrische Funktionen	52
4.4	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	53
4.4.1	Lokale Extrema	53
4.4.2	Der Mittelwertsatz	54
4.4.3	Konvexität und höhere Ableitungen	56
4.4.4	Der Satz von Taylor	58
4.5	Anwendungen auf die Untersuchung von Funktionsgraphen	61
4.6	Anwendung auf die Bestimmung von Grenzwerten	63

5	Integralrechnung	64
5.1	Der Begriff des Riemann-Integrals	64
5.2	Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen	68
5.3	Eigenschaften des Riemannintegrals	69
5.4	Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung	72
5.5	Einige Integrationstechniken	75
5.6	Stammfunktionen rationaler Funktionen	80
5.7	Flächeninhalte	83
5.8	Uneigentliche Integrale	86
6	Der Vektorraum \mathbb{R}^n	91
6.1	Vektoren und Geraden im \mathbb{R}^2	91
6.2	Vektoren, Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3	97
6.3	Der Vektorraum \mathbb{R}^n	102
7	Lineare Räume	104
7.1	Definition und Beispiele	104
7.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension	106
8	Lineare Abbildungen und Matrizen	109
8.1	Lineare Abbildungen	109
8.2	Matrizen	112
8.3	Der Rang einer Matrix	116
9	Lineare Gleichungssysteme	118
9.1	Lösbarkeit und Lösungsstruktur	118
9.2	Der Gaußsche Algorithmus	122
10	Determinanten	127
10.1	Definition und Eigenschaften	127
10.2	Determinanten und invertierbare Matrizen	132
11	Eigenwerte und Eigenvektoren	136
11.1	Definitionen und einfache Eigenschaften	136
11.2	Koordinatentransformationen	140
11.3	Diagonalähnliche Matrizen	142
11.4	Orthonormalbasen	143
11.5	Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen	146
11.6	Quadratische Gleichungen	149
11.7	Hauptachsentransformationen und Klassifikation der Kurven und Flächen 2. Ordnung	151

12 Folgen und Reihen von Funktionen	156
12.1 Punktweise Konvergenz	156
12.2 Gleichmäßige Konvergenz	157
12.3 Potenzreihen	162
12.4 Fourierreihen	170
13 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	178
13.1 Mengen im \mathbb{R}^n	178
13.2 Grenzwerte und Stetigkeit	179
13.3 Partielle Ableitungen	182
13.4 Differenzierbarkeit	185
13.5 Richtungsableitungen	190
13.6 Mittelwertsatz und Satz von Taylor	191
13.7 Lokale Extrema	194
13.8 Parameterabhängige Integrale	196
13.9 Implizite Funktionen und Umkehrabbildungen	199
13.10 Extrema unter Nebenbedingungen	202
14 Wegintegrale	207
14.1 Wege im \mathbb{R}^n	207
14.2 Wegintegrale	211
15 Integration im \mathbb{R}^n	219
15.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im \mathbb{R}^n	219
15.2 Integration über messbaren Mengen	224
15.3 Integration über Normalbereiche	229
15.4 Die Substitutionsregel	232
16 Oberflächenintegrale	241
16.1 Flächen, Tangenten und Normalen	241
16.2 Flächenintegrale	245
17 Integralsätze	250
17.1 Die Divergenz eines Vektorfeldes	250
17.2 Der Gaußsche Integralsatz im Raum	252
17.3 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene	256
17.4 Der Stokessche Integralsatz	259
17.5 Einige weitere Differential- und Integralformeln	265
17.5.1 Der Nabla-Operator	265
17.5.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren	266
17.5.3 Produktregeln	266
17.5.4 Die Greenschen Formeln	266

18 Differentialgleichungen	268
18.1 Grundbegriffe und Beispiele	268
18.2 Elementare Lösungsmethoden	273
18.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen . . .	273
18.2.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	274
18.2.3 Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen	277
18.2.4 Bernoullische Differentialgleichungen	278
18.2.5 Exakte Differentialgleichungen	279
18.2.6 Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$	281
18.2.7 Die Differentialgleichung $y'' = f(y, y')$	282
18.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	284
18.4 Potenzreihenansätze	288
19 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen	295
19.1 Allgemeine lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	295
19.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . .	303
19.3 System linearer Differentialgleichungen	308
19.4 Die Laplace-Transformation	314
20 Rand- und Eigenwertaufgaben	322
20.1 Definitionen und Beispiele	322
20.2 Sturmsche RWP und Greensche Funktion	324
20.3 Die Wellengleichung	328
20.4 Die Wärmeleitgleichung	331
21 Komplexe Differentiation	334
21.1 Die komplexe Zahlenebene	334
21.2 Komplexe Funktionen	337
21.3 Differentiation im Komplexen	341
21.4 Konforme Abbildungen	344
22 Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel	350
22.1 Komplexe Wegintegrale	350
22.2 Der Cauchysche Integralsatz	353
22.3 Die Cauchysche Integralformel	356
22.4 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen	357
22.5 Eigenschaften holomorpher Funktionen	361
23 Laurentreihen und Residuen	366
23.1 Laurentreihen	366
23.2 Isolierte Singularitäten	369
23.3 Residuen	371
23.4 Anwendungen des Residuensatzes zur Integralberechnung	374

23.4.1	Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$	375
23.4.2	Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha x f(x)dx$	376
23.4.3	Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$	377