Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Trebels
E. Briseid

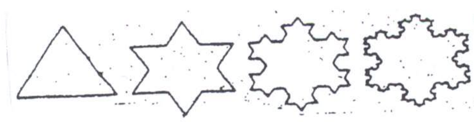
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

07.10.2009

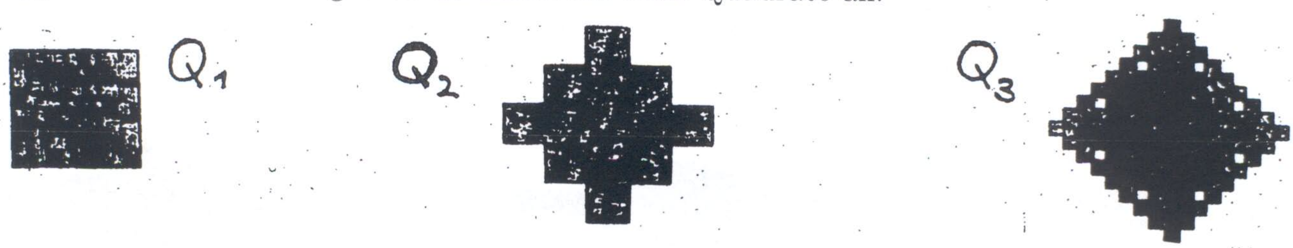
OWO-Übung Analysis I
WS 2009/10

(G0.1)

In der OWO-Vorlesung haben wir eine Folge von Polygonen konstruiert:



Wir werden jetzt diese Konstruktion ändern und eine andere Folge von Polygonen betrachten: $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$. Wir fangen an mit einem Quadrat Q_1 mit Seitenlänge 1. Wir erhalten jetzt das Polygon Q_2, indem wir jede Seite von Q_1 in drei gleich große Teile unterteilen und jeweils an den mittleren Teil jeder Seite von Q_1 ein Quadrat mit Seitenlänge 1/3 anfügen. Auf die gleiche Weise konstruieren wir Q_{n+1} ausgehend von Q_n: Wir teilen jede Seite von Q_n in drei Teile und fügen an die mittleren Teile Quadrate an.



Berechnen Sie die folgenden Werte für die Polygone Q_n: Die Anzahl der Seiten K_n, die Länge L_n jeder Seite, den Umfang U_n und die Fläche F_n. Machen Sie das für Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und allgemein für Q_n.

Wie verhalten sich U_n und F_n wenn n gegen ∞ strebt?

(G0.2)

Wir betrachten die Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k-1} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{n^2+n-1}.$$

Gibt es ein $M > 0$, so dass $S_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, oder gilt $S_n \to \infty$, wenn $n \to \infty$?

Wir haben in der OWO-Vorlesung gesehen, dass, falls eine solche Schranke existiert, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k-1}$ konvergiert, da alle Terme nichtnegativ sind.

(G0.3)

Wir betrachten die Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ nicht konvergiert, indem Sie zeigen, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \to \infty$ wenn $n \to \infty$.

(G0.4)

Wir konstruieren Rechtecke $R_1, R_2, R_3, \ldots$ wie folgt:

Das Startrechteck R_1 hat Länge 1 und Breite $1/4$. Dann teilen wir jede lange Seite von R_1 durch 4. Anschließend kleben wir auf die mittleren zwei Viertel der langen Seiten die lange Seite eines Rechtecks mit Länge $1/2$ und Breite $1/8$. Die lange Seite des kleinen Rechtecks, die das große Rechteck nicht berührt, nennen wir r_2 bzw. r_2'. Auf die mittleren zwei Viertel der kurzen Seiten kleben wir ebenfalls Rechtecke der Länge $1/2$ und Breite $1/8$. Diesmal kleben wir die Rechtecke mit den kurzen Seiten an. Die den Klebestellen gegenüber liegenden Seiten der kleinen Rechtecke nennen wir r_2'' und r_2'''. Hiermit haben wir R_2 konstruiert.

Haben wir das Polygon R_n konstruiert so ergibt sich R_{n+1} durch Anwenden der gleichen Schritte wie oben: Wir teilen also r_n, r_n', r_n'', r_n''' in 4 gleiche Teile und kleben an die mittleren zwei Viertel dieser Seiten jeweils ein Rechteck der Länge $(1/2)^n$ und der Breite $(1/8)^n$.

Berechnen Sie die folgenden Werte für R_n: die Anzahl der Kanten K_n, den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n. Wie verhalten sich K_n, U_n und F_n, wenn n gegen ∞ strebt?