Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
14.01.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 14 – Minitest:

In dieser Aufgabe seien V, W reelle Vektorräume über $\mathbb{R}$, wobei V die Dimension $n > 0$ und W die Dimension $m > 0$ hat.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $m > n$ ist, gibt es eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$.
2) Falls $m < n$ ist, so existiert eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$.
3) Falls $m = n$ ist und die lineare Abbildung $f\colon V \to W$ hat $\ker(f) = \{0\}$, dann ist f surjektiv und bijektiv.
4) Falls $m \neq n$ ist, existiert es ein Isomorphismus zwischen V und W.
5) Die Dimensionsformel gilt nur für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen.

Aufgabe 15 – Lineare Abbildungen:

a) Geben Sie einen unendlich dimensionalen Vektorraum V an.
b) Geben Sie eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
c) Geben Sie eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ an, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 16 – Gram-Schmidt-Verfahren:

Gegeben sei auf $V = \operatorname{span}(1, t, t^2)$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis $(1, t, t^2)$.
b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Hausaufgabe 11 – Lineare Abbildungen:

Sei $(v_1, .., v_n)$ eine Basis eines Vektorraums V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Lin}(f(v_1), ..., f(v_n)) = \mathrm{Im}\, f$.

b) f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Rang}\, f = \dim W$.

c) f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $(f(v_1), ..., f(v_n))$ sind linear unabhängig.

Hausaufgabe 12 – Rechnen mit Matrizen:

Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung, die durch folgende Matrix beschrieben wird.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$