Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
10.12.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

5. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 12 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) $M \subseteq V$ Teilmenge $\quad\Rightarrow\quad M^\perp \subseteq V$ ist linearer Teilraum.
2) $U \subseteq W \subseteq V$ Teilmenge $\quad\Rightarrow\quad W^\perp \subseteq U^\perp$.
3) $M \subseteq V$ Teilraum $\Rightarrow \quad \dim V = \dim M + \dim M^\perp$.
4) $M \subseteq V$ Teilraum $\Rightarrow \quad (M^\perp)^\perp = M$.
5) Der Vektorraum $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ hat Dimension n und der Vektorraum $(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ hat Dimension $2n$.
6) Der Raum der Polynome mit komplexen Koeffizienten und Grad $\leq n$, hat Dimension $2n+1$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 13 – Lineare Unabhängigkeit, Basen:

Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig? Welche sind Basen? Ergänzen Sie sie gegebenenfalls zu einer Basis.

1) $[2x^3 - 2x^2 + 5x, -3x^3 + 3x^2 - x, x^3 - 18x^2 + 23x] \in P_3(\mathbb{R})$
2) $[1, \sin^2(x), \cos(2x)] \in C(\mathbb{R})$, wobei $C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$

Aufgabe 14 – Skalarprodukte:

Definieren Sie ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome $P_n(\mathbb{R})$, sodaß die Basis

$$1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^n}{n!}$$

orthonormal ist.

Hausaufgabe 9 – Orthonormalbasis: *(4 Punkte)*

Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit Standard-Skalarprodukt. Setze $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \sum_{i=1}^{4} x_i = 0\}$.

i) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für U.

ii) Bestimmen Sie $U^\perp$.

Hausaufgabe 10 – Cauchy-Schwarz-Ungleichung: *(4 Punkte)*

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >_V$. Zeigen Sie, daß dann für $x, y \in V$ folgende Ungleichung gilt:

$$| < x, y >_V | \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Hinweis: Analogie zum Standard-Skalarprodukt.