Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
26.11.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 10 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Jedes lineare inhomogene Gleichungssystem in V besitzt eine Lösung.

2) Es gibt insgesamt $n + 1$ erzeugende Systeme von $\mathbb{R}^n$.

3) Ein aus n Variablen und n Gleichungen bestehendes lineares Gleichungssystem kann höchstens n linear unabhängige Lösungen besitzen.

4) Jedes lineare Gleichungssystem, das mindesten 2 verschiedene Lösungen in V hat, hat auch unendlich viele Lösungen.

5) Seien $u, v, w \in V$ mit $u, v, w \neq 0$. Ist u keine Linearkombination der Vektoren v, w, so sind u, v, w linear unabhängig.

6) Der Vektorraum V besitzt ein erzeugendes System S mit $n + 1$ Elementen, d.h. $\mathrm{lin}(S) = V$.

7) Es gibt $n + 1$ linear unabhängigen Vektoren in V.

8) Seien $v_1, ..., v_{n+1} \in V$ beliebig. Dann bilden $(v_i)_{i \in \{1,...,n+1\}}$ ein erzeugendes System von V.

Aufgabe 11 – Lineare Unabhängigkeit, Basen:

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig sind. Welche sind Basen, d.h. minimale (bzgl. der Inklusion) erzeugende Systeme?

   (a)
   $$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$$

   (b)
   $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \in (\mathbb{F}_2)^3$$

   (c)
   $$\left[\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$$

2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 5) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ auf lineare Unabhängigkeit.

   (a) 10 und $14 + \sqrt{2}$, (b) $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$, (c) 5 und $7 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

3. Seien $(a, b)^T$ und $(c, d)^T$ zwei Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass sie genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$ ist.

4. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist eine Abbildung}\}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Paare von Vektoren $f, g \in V$ jeweils linear unabhängig sind. Welche darunter bilden eine Basis von V?

   (a) $f(x) = x$ und $g(x) = 1$

   (b) $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$

   (c) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos 2x$ und $h(x) = \cos^2 x$.

   (d)* $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(2x)$

Hausaufgabe 7 – Lineare Gleichungssysteme: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum und $x \in V$, so gibt es ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau $x + U := \{x + y : y \in U\}$ ist.

Hausaufgabe 8 – Lineare Unabhängigkeit: *(4 Punkte)*

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $u = (\alpha^2, 1, \beta)$, $v = (\beta, -1, 1)$ linear unabhängig?