Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
29.10.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 4 – Unterräume:

a) Ist $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 0\}$ ein Unterraum vom $\mathbb{R}^3$?

b) Ist $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 1\}$ ein Unterraum vom $\mathbb{R}^3$?

c) Sei $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + z = 0\}$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Aufgabe 5 – Lineare Abbildungen:

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $P_3 := \{a + bx + cx^2 + dx^3 \colon a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

a) Wir betrachten die Abbildung $f \colon V \to \mathbb{R}$, $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + b + c + d$. Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild vom f.

c) Ist f injektiv bzw. surjektiv?

d) Sei $D \colon P_3 \to P_2$, $D(f) = \frac{df}{dx}$. Zeigen Sie, dass D eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie Kern(D^2) und Bild(D^2).

e) Warum ist $\mathbb{R}^4$ isomorph zu P_3?

Aufgabe 6 – Normen:

a) Seien $||\cdot||$ und $|||\cdot|||$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß dann auch

   i) $||\cdot||_\lambda := \lambda||\cdot||, \ \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
   ii) $||\cdot||_+ := ||\cdot|| + |||\cdot|||$
   iii) $||\cdot||_{max} := \max\{||\cdot||, |||\cdot|||\}$
   iv) $||\cdot||_{\lambda max} := \max\{||\cdot||, \lambda|||\cdot|||\}, \ \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

   Normen sind.

b) Zeichnen Sie die Einheitskugeln folgender Normen im $\mathbb{R}^2$:

   i) $||\cdot||_1$ ii) $||\cdot||_2$ iii) $||\cdot||_\infty$ iv) $||\cdot||_1 + ||\cdot||_\infty$ v) $\max\{||\cdot||_1, ||\cdot||_2\}$
   vi) $\max\{\frac{2}{3}||\cdot||_1, ||\cdot||_\infty\}$

Hausaufgabe 3 – Geraden: *(2 + 2 + 2 Punkte)*

Sei L eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ bestimmt durch u, v mit $u \neq v$. Ferner seien n ein zu $w := u - v$ orthogonaler Vektor und $p \in L$.

i) Zeigen Sie, daß sich der Abstand der Geraden zum Nullpunkt mittels $d = |\frac{<n,p>}{||n||}|$ bestimmen läßt. Zerlegen Sie p in seine Anteile bezüglich w und n und fertigen Sie eine Skizze an.

ii) Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß $x \in L$ genau dann, wenn der Zerlegungsanteil von x bezüglich n $\frac{<n,p>}{||n||}$ beträgt, d.h. x die Gleichung $< \frac{n}{||n||}, x - p >= 0$ bzw. $< \frac{n}{||n||}, x >=< \frac{n}{||n||}, p >$ erfüllt.

iii) Sei L die Gerade durch die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 0)$. Bestimmen Sie den Abstand zum Nullpunkt sowie zum Punkt $(2, 1)$.

Hausaufgabe 4 – Skalarprodukt: *(2 + 2 + 20* Punkte)*

Zeigen Sie, dass für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der folgende Zusammenhang zwischen Normen und Skalarprodukten gilt:

a) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit zugehöriger Norm $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, so gilt die Parallelogramm-Gleichung:

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2.$$

b) Zeigen Sie

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\langle w + v, w + v \rangle - \langle w - v, w - v \rangle).$$

c*) Ist umgekehrt $|| \cdot ||$ eine Norm auf V, die die Parallelogrammgleichung erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V mit $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.