



1. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 1 – Logisches Schließen:

Anna sagt: “Bettina lügt.”

Bettina sagt: “Claudia lügt.”

Claudia sagt: “Anna und Bettina lügen.”

Wer lügt denn nun?

Aufgabe 2 – Körper:

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$ mit \mathbb{N} und die ganzen Zahlen $0, 1, -1, 2, -2, \dots$ mit \mathbb{Z} . Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist gegeben durch $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit \mathbb{R} . Alle Mengen sind ausgestattet mit der üblichen Addition $+$, Multiplikation \cdot .

i) Warum sind \mathbb{N} und \mathbb{Z} keine Körper?

ii) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} lösbar?

a) $x - 1 = 0$

b) $x + 1 = 0$

c) $x^2 = 4$

d) $x^2 = 2$

e) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$

iii) Warum ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht in \mathbb{R} lösbar?

iv) Wir betrachten \mathbb{R}^2 mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist und $i \cdot i = (-1, 0)$. Dabei sei $i := (0, 1)$.

Aufgabe 3 – Vollständige Induktion:

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Formel

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Hausaufgabe 1 – Ebene:

(2 Punkte)

Finden Sie eine Parametrisierung für die Ebene

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Hausaufgabe 2 – Vektorräume:

(8 Punkte)

- a) Sei X eine Menge und $Abb(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Zeigen Sie: $Abb(X)$ ist ein Vektorraum über \mathbb{K} bezüglich der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in X$$

und der Skalarmultiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

- b) Bei welchen der folgenden Teilmengen des $Abb(\mathbb{C})$ handelt es sich um einen Vektorraum über \mathbb{C} .

i) $P(\mathbb{C}) := \{p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : p \text{ ist ein Polynom}\}.$

ii) $P^0(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 0\}.$

iii) $P^1(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 1\}.$

iv) $P_n(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : \deg(p) \leq n\}, \quad (n \in \mathbb{N}).$

v) $P^* := \{p \in P(\mathbb{C}) : p'(0) + 2p(0) = 0\}$

- c) Entscheiden sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt.

i) $c := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition

ii) $c_1 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition

iii) \mathbb{K} über \mathbb{K}