Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
11.02.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

8. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 20 – Matrizen linearer Abbildungen:

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix A zu f und $\operatorname{rank} f$.

b) Bestimmen Sie die Lösungen von $f(x) = 0$.

b) Bestimmen Sie das Urbild des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. der Abbildung f.

Lösung:

a) Die Matrix A zu f ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 Punkte)

Beim Anwenden des Gauss-Jordan-Verfahrens erhalten wir die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{rank} f = 3$ *(1 Punkte).*

b) Nach der Dimensionsformel ist $\dim(\ker f) = 0$. *(1 Punkte)*
Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$. *(1 Punkte)*

c) Es ist das Gauss-Jordan-Verfahren anzuwenden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

Das Urbild von $(1, 2, 3)^t$ ist $(0, 1, 2)^t$. *(1 Punkte)*

Aufgabe 21 – Matrizen linearer Abbildungen:

Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung $T:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ habe bezüglich $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ die Matrix

$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Zeigen Sie, daß $T^2 = T$ gilt.

ii) Eine zweite Basis des $\mathbb{R}^3$ sei durch $B' := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ gegeben. Stellen Sie die Basiswechselmatrix $M_{id}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ auf und geben Sie die Matrix von T bezüglich $\mathcal{B}', \mathcal{B}'$ an. Kann man das Ergebnis geometrisch interpretieren?

Lösung:

i) Eine direkte Rechnung zeigt, daß $T^2 = T$ gilt.

ii) Eine zweite Basis des $\mathbb{R}^3$ sei durch $B' := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ gegeben.

$$e_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist die Basiswechselmatrix

$$M_{id}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir wissen andererseits, dass

$$M_{id}^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wegen $M_{id}^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot M_{id}^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = id$ ist die Matrix von T bezüglich $\mathcal{B}', \mathcal{B}'$

$$M_T^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bezüglich der Basis B' handelt es sich bei T um eine orthogonale Projektion auf dem durch $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ aufgespannten Ebene.

Aufgabe 22 – Inverse von Matrizen:

Finden Sie eine Rechtsinverse zu folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie zu einer Matrix A eine weitere Matrix A^{-1}, sodaß$AA^{-1} = 1$.

$$\text{i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{iii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die Matrix ii) hat den Rang 1, somit nicht invertierbar.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$