Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
14.01.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 14 – Minitest:

In dieser Aufgabe seien V, W reelle Vektorräume über $\mathbb{R}$, wobei V die Dimension $n > 0$ und W die Dimension $m > 0$ hat.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $m > n$ ist, gibt es eine lineare Abbildung $f: V \to W$.
2) Falls $m < n$ ist, so existiert eine lineare Abbildung $f: V \to W$.
3) Falls $m = n$ ist und die lineare Abbildung $f: V \to W$ hat $\ker(f) = \{0\}$, dann ist f surjektiv und bijektiv.
4) Falls $m \neq n$ ist, existiert es ein Isomorphismus zwischen V und W.
5) Die Dimensionsformel gilt nur für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen.

Lösung:

1) Richtig.
2) Richtig
3) Richtig.
4) Falsch.
5) Richtig. Beweis siehe Skript S. 32.

Aufgabe 15 – Lineare Abbildungen:

a) Geben Sie einen unendlich dimensionalen Vektorraum V an.
b) Geben Sie eine lineare Abbildung $f: V \to V$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
c) Geben Sie eine lineare Abbildung $f: V \to V$ an, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Lösung:

a) Sei $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$. Man kann zeigen,V ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum.
b) Sei $U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$. Man kann zeigen, U ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum von V. Die Abbildung $f: V \to U$, $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+1} - a_n$ ist linear und surjektiv (warum?) aber nicht injektiv (klar?).
Oder wir betrachten ein einfacheres Beispiel: $f: V \to \mathbb{R}$ mit $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} a_n$.
In diesem Fall ist f ist eine lineare Abbildung, die surjektiv ist aber nicht injektiv.

c) Sei $g\colon \mathbb{R} \to V$, $g(x) = (a(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a(x)_n = x$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung g ist linear, injektiv, jedoch nicht surjektiv.

Aufgabe 16 – Gram-Schmidt-Verfahren:

Gegeben sei auf $V = \mathrm{span}(1, t, t^2)$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis $(1, t, t^2)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Lösung:

a) Die Matrix A von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis $(1, t, t^2)$ ist eine 3×3-Matrix. Die Einträge berechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1dt = 0 \\
a_{22} &= \langle t, t\rangle = \int_{-1}^{1} t \cdot tdt = \frac{2}{3} \\
a_{33} &= \langle t^2, t^2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot t^2dt = \frac{2}{5} \\
a_{ij} &= 0,\ \text{für } i \neq j
\end{aligned}$$

b) Wir erhalten aus direktem Rechnen

$$\begin{aligned}
\langle 1, t\rangle &= 0 \\
\langle 1, t^2\rangle &= \frac{2}{3} \\
\langle t, t^2\rangle &= 0
\end{aligned}$$

Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren und erhalten eine Orthonormalbasis

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\sqrt{\langle 1, 1\rangle}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
e_2 &= \frac{t}{\langle t, t\rangle} = \frac{3}{2}t \\
e_3 &= t^2 - \langle t^2, e_1\rangle \cdot e_1 = t^2 - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 11 – Lineare Abbildungen:

Sei $(v_1, .., v_n)$ eine Basis eines Vektorraums V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Lin}(f(v_1), ..., f(v_n)) = \mathrm{Im}\, f$.

b) f ist surjektiv $\Longleftrightarrow \mathrm{Rang}\, f = \dim W$.

c) f ist injektiv $\Longleftrightarrow (f(v_1), ..., f(v_n))$ sind linear unabhängig.

Lösung:

a) Bezeichne $\mathrm{Lin}(f) = \mathrm{Lin}(f(v_1), ..., f(v_n))$.
Es ist zu zeigen $\mathrm{Lin}(f) \subset \mathrm{Im}\, f$ und $\mathrm{Lin}(f) \supset \mathrm{Im}\, f$. Dies folgt aus der Linearität.

b) Nach der Definition gilt: f ist surjektiv $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \Longleftrightarrow \mathrm{Rang}\, f$.

c) f ist injektiv $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f = n$ (Dimensionsformel)
Es folgt aus $a) \Longleftrightarrow (f(v_1), ..., f(v_n))$ sind linear unabhängig. .

Hausaufgabe 12 – Rechnen mit Matrizen:

Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung, die durch folgende Matrix beschrieben wird.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Bei Verwenden des Gauß-Jordan-Algorithmus erhalten wir folgende Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen: Die lineare Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ hat den Rang 2 und $\mathrm{Ker}\, f_A$ hat die Dimension 2. Und den Kern zu bestimmen werden wir die Gleichung $A \cdot x = 0$ lösen. Setze $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$, die Lösung der Gleichung lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_3 + 12x_4 \\ 6x_3 + 7x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1 :=} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2 :=}$$

Somit $\mathrm{Ker}\, f_A = \{\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Seien $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $v_3, v_4 \notin \mathrm{Ker}\, f_A$. Nach dem Resultat aus Hausaufgabe 11 a) ist $\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{Lin}(f_A(v_3), f_A(v_4))$.