Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
10.12.2009

5. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 12 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) $M \subseteq V$ Teilmenge $\Rightarrow$ $M^\perp \subseteq V$ ist linearer Teilraum.
2) $U \subseteq W \subseteq V$ Teilmenge $\Rightarrow$ $W^\perp \subseteq U^\perp$.
3) $M \subseteq V$ Teilraum $\Rightarrow$ $\dim V = \dim M + \dim M^\perp$.
4) $M \subseteq V$ Teilraum $\Rightarrow$ $(M^\perp)^\perp = M$.
5) Der Vektorraum $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ hat Dimension n und der Vektorraum $(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ hat Dimension $2n$.
6) Der Raum der Polynome mit komplexen Koeffizienten und Grad $\leq n$, hat Dimension $2n + 1$ über $\mathbb{R}$.

Lösung:

1) Falsch.
2) Falsch.
3) Richtig.
4) Richtig.
5) Richtig.
6) Falsch.

Aufgabe 13 – Lineare Unabhängigkeit, Basen:

Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig? Welche sind Basen? Ergänzen Sie sie gegebenenfalls zu einer Basis.

1) $[2x^3 - 2x^2 + 5x, -3x^3 + 3x^2 - x, x^3 - 18x^2 + 23x] \in P_3(\mathbb{R})$
2) $[1, \sin^2(x), \cos(2x)] \in C(\mathbb{R})$, wobei $C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$

Lösung:

1) $[2x^3 - 2x^2 + 5x, -3x^3 + 3x^2 - x, x^3 - 18x^2 + 23x] \in P_3(\mathbb{R})$ sind linear unabhängig und mit 1 ergängzen sich zu einer Basis.
2) Wegen $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ sind die Vektoren linear abhängig.

Aufgabe 14 – Skalarprodukte:

Definieren Sie ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome $P_n(\mathbb{R})$, sodaß die Basis

$$1, t, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}$$

orthonormal ist.

Lösung: Wir betrachten das Skalarprodukt $s\colon P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$s(\frac{t^i}{i!}, \frac{t^j}{j!}) := \frac{2i+1}{2} \cdot (i!)^2 \int_{-1}^{1} \delta_i j \frac{t^i}{i!} \cdot \frac{t^i}{i!} dt$$

wobei $\delta_i j$ das Kronecker-Delta ist.

Hausaufgabe 9 – Orthonormalbasis: *(4 Punkte)*

Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit Standard-Skalarprodukt. Setze $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$.

i) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für U.

ii) Bestimmen Sie $U^\perp$.

Lösung:

Hausaufgabe 10 – Cauchy-Schwarz-Ungleichung: *(4 Punkte)*

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >_V$. Zeigen Sie, daß dann für $x, y \in V$ folgende Ungleichung gilt:

$$| < x, y >_V | \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Hinweis: Analogie zum Standard-Skalarprodukt.