Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
26.11.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 10 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Jedes lineare inhomogene Gleichungssystem in V besitzt eine Lösung.

2) Es gibt insgesamt $n+1$ erzeugende Systeme von $\mathbb{R}^n$.

3) Ein aus n Variablen und n Gleichungen bestehendes lineares Gleichungssystem kann höchstens n linear unabhängige Lösungen besitzen.

4) Jedes lineare Gleichungssystem, das mindesten 2 verschiedene Lösungen in V hat, hat auch unendlich viele Lösungen.

5) Seien $u, v, w \in V$ mit $u, v, w \neq 0$. Ist u keine Linearkombination der Vektoren v, w, so sind u, v, w linear unabhängig.

6) Der Vektorraum V besitzt ein erzeugendes System S mit $n+1$ Elementen, d.h. $\text{lin}(S) = V$.

7) Es gibt $n+1$ linear unabhängigen Vektoren in V.

8) Seien $v_1, ..., v_{n+1} \in V$ beliebig. Dann bilden $(v_i)_{i \in \{1,...,n+1\}}$ ein erzeugendes System von V.

Lösung:

1) Falsch.

2) Falsch.

3) Richtig.

4) Richtig.

5) Falsch. Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $u = (0,0,1)^t, v = (0,1,0)^t, w = (0,2,0)^t \neq 0$. So ist u keine Linearkombination der Vektoren v, w, dennoch sind u, v, w nicht linear unabhängig.

6) Richtig. Eine Basis B mit n Vektoren ist ein minimales erzeugendes System. Wenn wir einen beliebigen Vektor zu B hinzufügen, so bleibt B immer noch ein erzeugendes System.

7) Falsch. Es kann nicht $n+1$ lineare unabhängigen Vektoren in V geben während $\dim(V) = n$.

8) Falsch. Seien $v_1 = (1, ..., 0)^t, ..., v_n = (n, ..., 0)^t$. Diese Vektoren sind linear abhängig.

Aufgabe 11 – Lineare Unabhängigkeit, Basen:

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig sind. Welche sind Basen, d.h. minimale (bzgl. der Inklusion) erzeugende Systeme?

   (a)
   $$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$$

   (b)
   $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \in (\mathbb{F}_2)^3$$

   (c)
   $$\left[\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$$

2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 5) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ auf lineare Unabhängigkeit.

   (a) 10 und $14 + \sqrt{2}$, (b) $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$, (c) 5 und $7 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

3. Seien $(a, b)^T$ und $(c, d)^T$ zwei Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass sie genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$ ist.

4. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $\mathbb{R}^\mathbb{R} := \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist eine Abbildung}\}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Paare von Vektoren $f, g \in V$ jeweils linear unabhängig sind. Welche darunter bilden eine Basis von V?

   (a) $f(x) = x$ und $g(x) = 1$
   (b) $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$
   (c) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos 2x$ und $h(x) = \cos^2 x$.
   (d)* $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(2x)$

Lösung:

1. **Definition**: Sei V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls gilt: Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ und ist

   $$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ \ldots \ + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

   so folgt

   $$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

   (a) Die Vektoren sind nach der Definition linear unabhängig. Sie bilden keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
   (b) Die Vektoren sind nach Definition linear unabhängig. Sie bilden eine Basis des $\mathbb{F}_2^3$.
   (c) Die Vektoren sind nach Definition linear unabhängig. Sie bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

2. Die Menge $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ auf lineare Unabhängigkeit.

   (a) Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ und $10q_1 + 14\sqrt{2}q_2 = 0$.
   Daraus folgt: $\underbrace{10q_1 + 14q_2}_{rational} + \underbrace{\sqrt{2}q_2}_{irrational} = 0 \Longrightarrow q_1 = q_2 = 0.$

   (b) $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$ sind linear abhängig.

   (c) 5 und $7 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ sind linear abhängig.

3. **Beweis**: " $\Longrightarrow$ ": Sind $(a,b)^t$ und $(c,d)^t$ linear abhängig, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $(a,b)^t = \lambda(c,d)^t \Longrightarrow ad - bc = 0$.
   " $\Longleftarrow$ ": Sei $ad - bc = 0$.
   - Fall 1: $a = b = c = d = 0 \Longrightarrow (a,b)^t$ und $(c,d)^t$ sind linear abhängig.
   - Fall 2: Sei O.B.d.A. $c \neq 0$. Dann $ad - bc = 0 \Longrightarrow \frac{ad}{c} = b$. Falls $b = 0$, so muss entweder $a = 0$ oder $d = 0$. Beide Fälle führen zur linearen Abhängigkeit von $(a,b)^t$ und $(c,d)^t$.
     Falls $b \neq 0$, dann folgt $a, d \neq 0$. Wir haben $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda \in \mathbb{R}$. □

4. (a) $f(x) = x$ und $g(x) = 1$ sind linear unabhängig. Aus $\lambda f + \mu g = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $\lambda = \mu = 0$.
   (b) Die Funktion $g(x) = \sin(x)$ ist durch $\{\pm 1\}$ beschränkt. Hingegn ist $f(x) = x$ unbeschränkt. Somit sind f, g linear unabhängig.
   (c) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
   (d)* $g(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Wären f, g linear abhängig, so gäbe es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = \lambda f(x)$.↯

Hausaufgabe 7 – Lineare Gleichungssysteme: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum und $x \in V$, so gibt es ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau $x + U := \{x + y \colon y \in U\}$ ist.
Lösung: Seien $\dim(V) = n$ und $\dim(U) = m$. Behauptung: Es gibt eine lineare Abbildung $f \colon V \to V \setminus U \cup \{0\}$ mit Kern $f = U$. Man nimmt zum Beispiel die natürliche Projektion. Der rest folgt aus dem Buch Jänich Abs. 7.1 Bemerkung 2.

Hausaufgabe 8 – Lineare Unabhängigkeit: *(4 Punkte)*

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $u = (\alpha^2, 1, \beta)$, $v = (\beta, -1, 1)$ linear unabhängig?
Lösung: Nach der Definition sind u und v linear unabhängig wenn aus $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ folgt. We haben

$$\begin{aligned} \alpha^2\lambda_1 + \beta\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \beta\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 = \lambda_2$. Für $\lambda_1 \neq 0$ folgt $\beta = -1$ und $\alpha = \pm 1$.