Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
12.11.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 7 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Die Lösungsmenge jedes linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn man von einer Gleichung das λ-fache einer anderen Gleichung substrahiert.

2) Es gibt einen Vektorraum, der nur zwei Elemente enthält.

3) Sei $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Dann ist Kern(f) ein Unterraum von V.

4) Jeder $\mathbb{R}$-Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{R}^3$.

5) 2009 ist ein Vektor in dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

6) Eine lineare Abbildung $f\colon V \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn Kern$(f) = \{0\}$.

Lösung:

1) Richtig.

2) Richtig. z.B $\mathbb{F}_2$ über $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$.

3) Richtig. Folgt aus der Linearität von f.

4) Falsch. z.B. $\mathbb{R}^2$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber nicht isomorph zu $\mathbb{R}^3$.

5) Richtig.

6) Richtig. Sei $u \neq v \in V$. Dann ist $f(u) \neq f(v)$ genau dann, wenn $f(u - v) \neq 0$.

Aufgabe 8 – Konvexität:

i) Seien A, $B \in \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Entscheiden Sie, ob auch der Schnitt $A \cap B$ und die Vereinigung $A \cup B$ konvexe Mengen sind.

ii) Betrachten Sie in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt folgende Mengen

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad G_y := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, y\rangle = 0\}, \ y \in \mathbb{R}^n, \\ &\text{b)} \quad H_y := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, y\rangle \leq 0\}, \ y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Skizzieren Sie beide und zeigen Sie, daß sie konvex sind. Man bezeichnet H_y auch als Halbraum.

iii) Zeigen Sie, daß der Tetraeder mit den Eckpunkten $p_1 = (1, 1, 0)$, $p_2 = (1, -1, 0)$, $p_3 = (0, -1, 0)$ und $p_4 = (0, 0, 2)$ konvex ist. Versuche hierbei den Tetraeder geeignet durch eine Anzahl von Halbräumen zu beschreiben.

i) Seien $A,\ B \in \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Die Vereinigung $A \cup B$ ist nicht immer eine konvexe Menge. Der Schnitt $A \cap B$ ist wieder eine konvexe Menge. Dazu seien $x, y \in A \cap B$. Für die Verbindungstrecke $z(\lambda) = x + (1 - \lambda)(y - x)$ gilt wegen der Konvexität von A und B die Zugehörigheit $z(\lambda) \in A$ und $z(\lambda) \in B$.

ii) Betrachten Sie in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt folgende Mengen

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & G_y := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, y \rangle = 0\},\ y \in \mathbb{R}^n, \\ \text{b)} & H_y := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, y \rangle \leq 0\},\ y \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

Skizzieren Sie beide und zeigen Sie, daß sie konvex sind. Man bezeichnet H_y auch als Halbraum.

iii) Der Tetraeder mit den Eckpunkten $p_1 = (1, 1, 0)$, $p_2 = (1, -1, 0)$, $p_3 = (0, -1, 0)$ und $p_4 = (0, 0, 2)$ kann als der Schnitt von vier Halbräumen dargestellt werden. Jeder Halbraum ist nach ii) konvex, somit ist der Tetraeder nach i) als Schnitt von konvexen Mengen wieder konvex.

Aufgabe 9 – Kreuzprodukt:

Gegeben sei eine Ebene $E := \{v + \lambda w_1 + \mu w_2 \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Setzt man $a := w_1 \times w_2$ und $b := \langle v, a \rangle$, so gilt

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \langle x, a \rangle = b\}$$

Lösung: Aus $\langle x, a \rangle = b$ und $b := \langle v, a \rangle$ folgt

$$\langle x, a \rangle = \langle v, a \rangle \Longrightarrow \langle x - v, a \rangle = 0$$

D.h. der Vektor $(x - v) \perp a := w_1 \times w_2$. Aber wir wissen, dass $a \perp w_1$ und $a \perp w_2$. Somit muss $x - v$ eine lineare Kombination von w_1 und w_2 sein.

Hausaufgabe 5 – Lineare Formen: *(4 Punkte)*

Seien $f_1, f_2, ..., f_k$ lineare Formen.

a) Zeigen Sie, dass $M(x_1, x_2, ..., x_k) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \ldots \cdot f_k(x_k)$ eine k-lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{i \neq j \neq k = 1}^{3} f_1(x_i) f_2(x_j) f_3(x_k)$ eine symmetrische 3-lineare Form ist.

c) Zeigen Sie, dass $f_1(x_1)f_2(x_2) - f_1(x_2)f_2(x_1)$ eine antisymmetrische lineare Form ist.

Lösung:

a) Zeigen Sie, dass $M(x_1, x_2, ..., x_k) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \ldots \cdot f_k(x_k)$ eine k-lineare Abbildung ist.

b) Die Symmetrie folgt aus der Definition. Aus Teil a) folgt, dass die eine 3-lineare Form ist.

c) $f_1(x_1)f_2(x_2) - f_1(x_2)f_2(x_1)$ ist antisymmetrisch ist klar. Die ist eine lineare Form, folgt aus a).

Hausaufgabe 6 – Lineare Gleichungssysteme: *(2 + 4 Punkte)*

1) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mittels Gauss-Jordan-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & + & 12x_4 & = & 1 \end{array}$$

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} r \cdot x + \quad y + \quad z &= 1 \\ x + r \cdot y + \quad z &= 1 \\ x + \quad y + r \cdot z &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

1) Die Stufenform lautet

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & - & 12x_4 & = & 1 \end{array}$$

Im verbleibenden System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & = & -4 \end{array}$$

2)

- Falls $r = 0$, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $x = y = z = \frac{1}{2}$.
- Falls $r \neq 0$ und $r \neq \pm 1$ und $r \neq -2$ so läßt sich das Gleichungssystem in die Stufenform bringen

$$\begin{aligned} r \cdot x + \quad & y + & z &= 1 \\ 0 + (\frac{r^2-1}{r}) \cdot y + \quad & (\frac{r-1}{r}) \cdot z & &= \frac{r-1}{r} \\ 0 + \quad & 0 + \frac{(r+2)(r-1)}{r+1} \cdot z & &= \frac{r-1}{r+1} \end{aligned}$$

  Also erhalten wir $z = \frac{1}{r+2}$, in die zweite Gleichung einsetzten erhalten wir $y = \frac{1}{r+2}$. Also das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung $x = y = z = \frac{1}{r+2}$.
- Falls $r = 1$, $(x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Falls $r = -1$, $x = y = z = 1$.
- Falls $r \neq -2$, keine Lösung.