Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
29.10.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 2. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

**Aufgabe 4 – Unterräume:**

a) Ist $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 0\}$ ein Unterraum vom $\mathbb{R}^3$?

b) Ist $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 1\}$ ein Unterraum vom $\mathbb{R}^3$?

c) Sei $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + z = 0\}$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}^3 = U + W$.

**Lösung:**

a) $U$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

b) $V$ ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Es ist z.B $0 \notin V$.

c) Es ist klar, dass $U + W \subset \mathbb{R}^3$. Es bleibt zu zeigen $\mathbb{R}^3 \subset U + W$. Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Es gilt

$$(x, y, z) = \underbrace{(x, -x, z)}_{\in U} + \underbrace{(0, x + y, 0)}_{\in W}.$$

**Aufgabe 5 – Lineare Abbildungen:**

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $P_3 := \{a + bx + cx^2 + dx^3 \colon a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

a) Wir betrachten die Abbildung $f \colon P_3 \to \mathbb{R}$, $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + b + c + d$. Zeigen Sie, dass $f$ eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild vom $f$.

c) Ist $f$ injektiv bzw. surjektiv?

d) Sei $D \colon P_3 \to P_2$, $D(f) = \frac{df}{dx}$. Zeigen Sie, dass $D$ eine lineare Abbildung ist. Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(D^2)$ und $\mathrm{Bild}(D^2)$.

e) Warum ist $\mathbb{R}^4$ isomorph zu $P_3$?

**Lösung:**

a) $f(\lambda(a + bx + cx^2 + dx^3)) = \lambda \cdot (a + b + c + d)$.
Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$, $w = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3$. Dann gilt $f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$.

b) Aus $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = 0$ folgt $a + b + c + d = 0$. Somit ist $\mathrm{Kern}\, f := \{a + bx + cx^2 + dx^3 \colon a + b + c + d = 0\}$. Es gilt $\mathrm{Bild}\, f = \mathbb{R}$.

c) $f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Es ist z.B. $f(1) = f(x) = 1$.

d) Aus $(D^2)(f) = 0$ folgt $2c + 6dx = 0$, somit ist $\mathrm{Kern}(D^2) := \{a + bx + cx^2 + dx^3 \colon c = d = 0\} = P_1$. Und $\mathrm{Bild}(D^2) = \{c + 3dx \colon c, d \in \mathbb{R}\} \subset P_1$.

e) Die Koeffizienten jedes Polynoms aus $P_3$ entspichen genau einen Vektor aus $\mathbb{R}^4$ .

## Aufgabe 6 – Normen:

a) Seien $||\cdot||$ und $|||\cdot|||$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß dann auch

   i) $||\cdot||_\lambda := \lambda||\cdot||\,,\ \lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

   ii) $||\cdot||_+ := ||\cdot|| + |||\cdot|||$

   iii) $||\cdot||_{max} := \max\{||\cdot||, |||\cdot|||\}$

   iv) $||\cdot||_{\lambda max} := \max\{||\cdot||, \lambda|||\cdot|||\},\ \lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

   Normen sind.

b) Zeichnen Sie die Einheitskugeln folgender Normen im $\mathbb{R}^2$:

   i) $||\cdot||_1$ ii) $||\cdot||_2$ iii) $||\cdot||_\infty$ iv) $||\cdot||_1 + ||\cdot||_\infty$ v) $\max\{||\cdot||_1, ||\cdot||_2\}$

   vi) $\max\{\frac{2}{3}||\cdot||_1, ||\cdot||_\infty\}$

**Hausaufgabe 3 – Geraden:** *(2 + 2 + 2 Punkte)*

Sei $L$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ bestimmt durch $u$, $v$ mit $u \neq v$. Ferner seien $n$ ein zu $w := u - v$ orthogonaler Vektor und $p \in L$.

i) Zeigen Sie, daß sich der Abstand der Geraden zum Nullpunkt mittels $d = |\frac{<n,p>}{||n||}|$ bestimmen läßt. Zerlegen Sie $p$ in seine Anteile bezüglich $w$ und $n$ und fertigen Sie eine Skizze an.

ii) Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß $x \in L$ genau dann, wenn der Zerlegungsanteil von $x$ bezüglich $n$ $\frac{<n,p>}{||n||}$ beträgt, d.h. $x$ die Gleichung $< \frac{n}{||n||}, x - p >= 0$ bzw. $< \frac{n}{||n||}, x >=< \frac{n}{||n||}, p >$ erfüllt.

iii) Sei $L$ die Gerade durch die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 0)$. Bestimmen Sie den Abstand zum Nullpunkt sowie zum Punkt $(2, 1)$.

**Hausaufgabe 4 – Skalarprodukt:** *(2 + 2 + 20* Punkte)*

Zeigen Sie, dass für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V$ der folgende Zusammenhang zwischen Normen und Skalarprodukten gilt:

a) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $V$ mit zugehöriger Norm $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, so gilt die Parallelogramm-Gleichung:

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2.$$

b) Zeigen Sie

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\langle w + v, w + v\rangle - \langle w - v, w - v\rangle).$$

c*) Ist umgekehrt $||\cdot||$ eine Norm auf $V$, die die Parallelogrammgleichung erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $V$ mit $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

**Lösung:**

a) Es folgt aus der Linearität des Skalarproduktes.

b) Es folgt ebenfalls aus der Linearität des Skalarproduktes.

c*) Wir definieren

$$\langle v, w\rangle := \frac{1}{4}(||v + w||^2 - ||v - w||^2)$$

1. Es ist klar, dass die Symmetrie-Eigenschaft gültig ist

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$$

2. Wir zeigen $\langle v, w\rangle \geq 0$. Aus *a*) und *b*) erhalten wir

$$||v||^2 + ||w||^2 - 2\langle v, w\rangle = ||v - w||^2.$$

Daraus folgt

$$2\langle v, w\rangle = \underbrace{||v||^2 + ||w||^2 - ||v - w||^2}_{\Delta\text{-Ungleichung}} \geq 0.$$

3. Wir zeigen die Linearität. Gemäßder Parallelogrammgleichung gilt es

$$||u+v+w||^2 = 2||u+w||^2 + 2||v||^2 - ||u-v+w||^2 =: \alpha$$

sowie

$$||u+v+w||^2 = 2||v+w||^2 + 2||u||^2 - ||-u+v+w||^2 =: \beta.$$

Zusammen ergibt es sich:

$$\begin{aligned} ||u+v+w||^2 &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ &= ||u+w||^2 + ||v||^2 + ||v+w||^2 + ||u||^2 - \frac{1}{2}(||u-v+w||^2 + ||-u+v+w||^2) \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$||u+v-w||^2 = ||u-w||^2 + ||v||^2 + ||v-w||^2 + ||u||^2 - \frac{1}{2}(||u-v-w||^2 + ||-u+v-w||^2).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \langle u+v, w\rangle &= \frac{1}{4}(||u+v+w||^2 - ||u+v-w||^2) \\ &= \frac{1}{4}(||u+w||^2 + ||v+w||^2 - ||u-w||^2 - ||v-w||^2) \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

Es gilt also für $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle$. Und nach der Konstruktion gilt es auch für $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ und somit auch für $\lambda \in \mathbb{Z}$. Deshalb gilt es auch für $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$:

$$n\langle \lambda u, v\rangle = n\langle \frac{m}{n} u, v\rangle = m\langle u, v\rangle = n\lambda\langle u, v\rangle$$

Wegen der Stetigkeit von $|| \cdot ||$ gilt die Homogenität auch für $\lambda \in \mathbb{R}$.