Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
15.10.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 1 – Logisches Schließen:

Anna sagt: "Bettina lügt."
Bettina sagt: "Claudia lügt."
Claudia sagt: "Anna und Bettina lügen."
Wer lügt denn nun?

Lösung: Angenommen, Anna lügt nicht. Dann gilt
$A \Rightarrow \neg B \Rightarrow C \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$ ↯. Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 2 – Körper:

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ mit $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ mit $\mathbb{Z}$. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit $\mathbb{R}$. Alle Mengen sind ausgestattet mit der üblichen Addition +, Multiplikation .

i) Warum sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ keine Körper?

ii) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lösbar?

a) $x - 1 = 0$
b) $x + 1 = 0$
c) $x^2 = 4$
d) $x^2 = 2$
e) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$

iii) Warum ist die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht in $\mathbb{R}$ lösbar?

iv) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist und $i \cdot i = (-1, 0)$. Dabei sei $i := (0, 1)$.

Lösung:

i) Z.B. die Zahl 2 ist nicht multiplikativ invertierbar. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist bzgl. der Addition eine Gruppe.

ii) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lösbar?

a) $x - 1 = 0$ ist lösbar in $\mathbb{N}$.

b) $x + 1 = 0$ ist lösbar in $\mathbb{Z}$.

c) $x^2 = 4$ ist lösbar in $\mathbb{Z}$.

d) $x^2 = 2$ ist lösbar in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

e) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$ ist lösbar in $\mathbb{Z}$.

iii) Wäre $x^2 = 1$ in $\mathbb{R}$ lösbar, so würde $x^{-1} = -x$ $\lightning$.

iv)

Aufgabe 3 – Vollständige Induktion:

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Formel

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Lösung: Wir zeigen : $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.
Induktionsbeginn: $\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$.
Sei die Vermutung für ein n bewiesen, dann gilt sie auch für $n+1$, denn

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)} \end{aligned}$$

Hausaufgabe 1 – Ebene: *(2 Punkte)*

Finden Sie eine Parametrisierung für die Ebene

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}.$$

Lösung: Aus $x + y + z = 0$ folgt $x = -y - z$.

$$E\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 2 – Vektorräume: *(8 Punkte)*

a) Sei X eine Menge und $Abb(X) := \{f : X \to \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Zeigen Sie: $Abb(X)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bezüglich der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),\ \forall x \in X$$

und der Skalarmultiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

b) Bei welchen der folgenden Teilmengen des $Abb(\mathbb{C})$ handelt es sich um einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

i) $P(\mathbb{C}) := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon p \text{ ist ein Polynom}\}$.
ii) $P^0(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon p(0) = 0\}$.
iii) $P^1(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon p(0) = 1\}$.
iv) $P_n(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon \deg(p) \leq n\},\ (n \in \mathbb{N})$.
v) $P^* := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon p'(0) + 2p(0) = 0\}$

c) Entscheiden sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt.

i) $c := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition
ii) $c_1 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition
iii) $\mathbb{K}$ über $\mathbb{K}$

Lösung:

a) 1 Punkt.

b) Bei welchen der folgenden Teilmengen des $Abb(\mathbb{C})$ handelt es sich um einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

i) $P(\mathbb{C}) := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \colon p \text{ ist ein Polynom}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Begründung: Seien $p, q\mathbb{P}(\mathbb{C})$. Mit der Addition $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ ist $P(\mathbb{C})$ eine commutative Gruppe. das neutrale Element ist das Null-Polynom $0 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $0(x) = 0$. Man kann leicht überprüfen, dass die Multiplikationen mit der Skalaren verträglich sind.

ii) $P^0(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon p(0) = 0\}$ ist ein Vektorraum.

iii) $P^1(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon p(0) = 1\}$ ist kein Vektorraum.

iv) $P_n(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon \deg(p) \leq n\}, \ (n \in \mathbb{N})$.

v) $P^* := \{p \in P(\mathbb{C}) \colon p'(0) + 2p(0) = 0\}$

c) Entscheiden sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt.

i) $c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition ist ein Vektorraum. Die Nullfolge ist das neutrale Element. 1 Punkt

ii) $c_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition ist kein Vektorraum. Denn die Nullfolge ist nicht drin. 1 Punkt.

iii) $\mathbb{K}$ über $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum. Denn $\mathbb{K}$ ist ein Körper. 1 Punkt.