



10. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologie“

Aufgabe 37

(3 Punkte)

(a) Für die Zufallsvariable X gelte:

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = 0.3, \mathbf{P}\{X = 4\} = 0.4, \mathbf{P}\{X = 5\} = 0.3.$$

Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen X .

(b) Sei Y eine $U(1, 2)$ -verteilte und sei Z eine von Y unabhängige $U(0, 4)$ -verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Varianz von $Y + Z$.

Aufgabe 38

(3 Punkte)

Die Zufallsvariable X ist stetig verteilt mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Aufgabe 39

(3 Punkte)

In einem Fischteich befinden sich insgesamt 5 Fische. Jeder der Fische ist entweder ein Goldfisch oder ein Bitterling. Wir fangen dreimal jeweils einen Fisch den wir sofort wieder in den Teich zurückwerfen und erhalten folgendes Ergebnis: Bitterling, Goldfisch, Goldfisch. Gesucht ist die Anzahl $\theta \in \{0, \dots, 5\}$ der Goldfische. Die Zufallsvariable X_i habe den Wert 1, falls beim i -ten Fang ein Goldfisch ins Netz ging und Null sonst (für $i = 1, 2, 3$). Die Idee beim Maximum-Likelihood-Prinzip ist es, den Parameter θ so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit für das oben angegebene Fangresultat maximal ist. Dabei kann man davon ausgehen, dass die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 unabhängig und identisch verteilt sind. Bei obigen Fängen wurde für X_1 der Wert 0, für X_2 der Wert 1 und für X_3 der Wert 1 beobachtet.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 in Abhängigkeit von θ .

(b) Bestimmen Sie dasjenige θ für $\theta \in \{0, 1, \dots, 5\}$, für das die Funktion

$$L(\theta) = \mathbf{P}_\theta[X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1]$$

maximal wird.

Bemerkung: Mit L bezeichnen wir die *Maximum-Likelihood-Funktion*.

Aufgabe 40

(3 Punkte)

Drei perfekten Schützen stehen drei unschuldige Enten gegenüber. Jeder Schütze wählt zufällig und unbeeinflusst von den anderen Schützen eine Ente aus, auf die er schießt. Sei X die zufällige Zahl überlebender Enten. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X unter Verwendung der Darstellung

$$X = \sum_{i=1}^3 X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls Ente } i \text{ überlebt} \\ 0 & , \text{ falls Ente } i \text{ nicht überlebt} \end{cases}$$