Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dominique Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 09/10
19.01.2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologie“

Aufgabe 33 (3 Punkte)

(a) Eine diskrete Zufallsgröße X heißt bernoulliverteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, wenn gilt:

$$\mathbf{P}[X=1]=p, \text{ und } \mathbf{P}[X=0]=1-p.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert einer bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0,1)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $X_1, \ldots, X_n$ bernoulliverteilte Zufallsvariablen mit Parameter p, so ist die Zufallsvariable $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ binomialverteilt mit Parametern n und p. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Resultats den Erwartungswert der Zufallsvariablen Y.

Lösung:

(a)

$$\mathbf{E}X \quad = \quad 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y \quad &= \quad \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{\text{(Eigenschaften von }\mathbf{E})}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) \\ &\overset{(X_i \text{ bernoulliverteilt})}{=} \sum_{i=1}^n p = n \cdot p \end{aligned}$$

Aufgabe 34 (3 Punkte)

Studentin S. hat von ihrem Arbeitsplatz aus freie Sicht auf ein Vogelhäuschen. Sie schätzt, dass sie im Mittel alle 20 Minuten einen Vogel beobachten kann. Nun will S. die Zeit bis zu ihrer nächsten Vogelsichtung stochastisch modellieren. Sie beschließt dazu eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

zu verwenden, wobei $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ (= die positiven reellen Zahlen ohne die Null) ein noch zu bestimmender Parameter dieser Dichte ist.
Wie muss sie λ wählen, damit der Erwartungswert der Zufallsvariable X gerade 20 ist?

Hinweis Verwenden Sie, dass

$$F(x) = -\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = xe^{-\lambda x}$ ist.

Lösung: Wir berechnen den Erwartungswert wie in der Vorlesung mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \cdot \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\
&= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\
&= 0 - \frac{1}{\lambda} \cdot \left[e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\
&= 0 - \frac{1}{\lambda} \cdot [0 - 1] \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

womit wir, um obige Frage zu beantworten, $\lambda = \frac{1}{20}$ wählen.

Aufgabe 35 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Sei X eine auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert X.

(b) Sei Y eine auf dem Intervall $[2, 4]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y^2.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $2X + 3Y^2$, wobei X und Y wie in den Aufgabenteilen (a) bzw. (b) definiert sind.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\ dx + \int_{1}^{2} x \cdot \frac{1}{2-1}\ dx + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot x\ dx \\
&= \int_{1}^{2} x\ dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y^2\right) &= \cdots = \int_{2}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{4-2}\ dx = \frac{1}{2} \int_{2}^{4} x^2\ dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=2}^{4} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3} \right) = \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

(c)

$$\mathbf{E}\left(2X+3Y^2\right) = 2\cdot\mathbf{E}X+3\cdot\mathbf{E}\left(Y^2\right)=3+28=31$$

Aufgabe 36 (3 Punkte)

Immer wenn Biologin B. ihren Kollegen K. besuchen will muss sie einmal umsteigen. Ihr Bus kommt rein zufällig (gleichverteilt) zwischen 8:07 Uhr und 8:14 Uhr am Bahnhof an. Die Regionalbahn zu K. bekommt sie aber nur, wenn sie pünktlich bis 8:10 am Bahnhof ist. Kommt sie jedoch zu spät, so muss sie ein Taxi nehmen und somit anstatt 6 Euro für eine Zugfahrkarte 31 Euro für das Taxi zahlen. Sei Z die reelle Zufallsvariable, welche die zufälligen Fahrtkosten beschreibt.

Bestimmen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsvariable.

Lösung: Wir modellieren die Kosten beim zufälligen Eintreffen mit der Kostenfunktion

$$h(x) = \begin{cases} 6, & 7\le x<10,\\ 31, & 10\le x\le 14,\\ 0, & sonst. \end{cases}$$

womit wir den Erwartungswert berechnen können mit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}h(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(X)f(x)dx\\
&= \int_{7}^{14} h(X)f(x)dx\\
&= \int_{7}^{10} 6\cdot\frac{1}{7}dx + \int_{10}^{14} 31\frac{1}{7}dx\\
&= \frac{6}{7}\left[x\right]_7^{10} + \frac{31}{7}\left[x\right]_{10}^{14}\\
&= \frac{6\cdot 3+31\cdot 4}{7}\\
&= \frac{142}{7}\\
&\approx 20,29
\end{aligned}$$