Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Kohler
Dominique Küpper

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 09/10
09.02.2010

12. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologie“

Aufgabe 45

Gegeben sei die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

x	0,00	0,85	1,00	1,29	1,65	1,96	2,00	2,33	3,00
$\Phi_{0;1}(x)$	0,5000	0,8023	0,8413	0,9015	0,9505	0,9750	0,9773	0,9901	0,9987

Lesen Sie für eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable Z die Werte $a, b, c \in \mathbb{R}$ aus obiger Tabelle heraus:

(a) $P(|Z| \leq a) \;\geq\; 0,95$.

(b) $P(Z \leq b) \;\geq\; 0,99$.

(c) $P(|Z| > c) \;\leq\; 0,10$.

Lösung:

(a) Da die Dichte der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung achsensymmetrisch ist, gilt $P[Z < -a] = P[Z > a]$. Außerdem ist allgemein $P[Z > a] = 1 - P[Z \leq a]$ und wir erhalten:

$$P(|Z| \leq a) = P[Z \leq a] - P[Z < -a] = 2 \cdot P[Z \leq a] - 1 = 2 \cdot \Phi_{0;1}(a) - 1 \geq 0,95$$

uns somit soll $\Phi_{0;1}(a) \geq 0,975$ sein, woraus $a \geq 1,96$ folgt.

(b) Direktes Ablesen liefert $b \geq 2,33$.

(c) Wir möchten ein c finden, so dass $P(|Z| > c) = 1 - P(|Z| \leq c) \;\leq\; 0,10$ bzw. $P(|Z| \leq c) \;\geq\; 0,90$. Analog zu (a) soll also $2 \cdot P[Z \leq c] \geq 0,90$ und damit $\Phi_{0;1}(a) \;\geq\; 0,95$ gelten. Es folgt $c \geq 1,65$.

Aufgabe 46

Eine Kettenviper gibt bei einem durchschnittlichen Erstbiss etwa 72 mg Gift ab. Auf einer Schlangenfarm versucht man diese Menge zu steigern, um wirtschaftlicher arbeiten zu können. Ob dies mit einer neuen Züchtung gelungen ist, soll durch eine Studie überprüft werden. Bei 225 Melkvorgängen konnten auf der Farm im Mittel 75 mg Gift entnommen werden, wobei die mittlere quadratische Abweichung bei 169 lag.

Wir wollen nun wissen, ob die Giftmengen der neuen Züchtung überhaupt nennenswert von denen einer normalen Kettenviper abweicht. Dabei gehen wir davon aus, dass die Giftmenge normalverteilt ist. Normalerweise müssten wir hierfür (wegen der geschätzten Varianz) einen t-Test durchführen. Da die Stichprobe aber sehr groß ist, können wir hier einen Gauß-Test anwenden.

(a) Führen Sie mit den oben gemachten Angaben einen Gauß-Test bzgl. der Hypothesen

$$H_0 : \mu = 72 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 72$$

zum Niveau $\alpha = 0,05$ durch.

(b) Welche Schlussfolgerungen lassen sich aufgrund des Testergebnisses aus Aufgabenteil (a) im Hinblick auf den Erfolg der neuen Züchtung ziehen?

Lösung:

(a) Wir verwenden folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung: Seien $X_1, \ldots, X_{225}$ unabhängig und identisch $N(\mu, 13)$-verteilt. Über die Realisierungen dieser Zufallsvariablen wissen wir, dass $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 75$ ist. Wir testen also auf

$$H_0 : \mu = 72 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 72$$

und lehnen H_0 ab, falls $\bar{x}$ sehr weit von 72 abweicht.
Wäre $\mu = 72$, so wäre die Zufallsvariable

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{13}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 72\right)$$

standardnormalverteilt (d.h. $N(0,1)$-verteilt).
Es gilt

$$P(|Z| \leq 1{,}96) \;\geq\; 0{,}95 \quad \text{bzw.} \quad P(|Z| > 1{,}96) \;\leq\; 0{,}05$$

und somit ergibt sich

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{x} - \mu_0)\right| = \left|\frac{15}{13}(75 - 72)\right| \approx 3{,}46 > 1{,}96.$$

was zur Ablehnung von H_0 führt.

(b) Der Test sagt lediglich aus, dass die Ergebnisse der neuen Züchtung signifikant von den Ergebnissen der alten abweichen. Aus dem Test lässt sich aber nicht schließen, dass der Ertrag bei der neuen Züchtung besser ist als bei der alten Züchtung. Dazu hätte ein einseitiger Gauß-Test durchgeführt werden müssen.

Aufgabe 47

Beim einseitigen Gauß-Test ist eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ einer Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ_0^2 gegeben und zu testen ist für ein gegebenes $\mu_0 \in \mathbb{R}$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

zu gegebenem Niveau $\alpha \in (0,1)$. Dabei wird H_0 abgelehnt, falls

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu_0\right)$$

größer ist als das α-Fraktil u_α von $\mathcal{N}(0,1)$. Wie müssen Sie diesen Test abändern, um damit

$$\bar{H}_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad \text{versus} \qquad \bar{H}_1 : \mu < \mu_0$$

zu Niveau $\alpha \in (0,1)$ zu testen?

Hinweis: Sprechen jetzt große oder kleine Werte von $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ für die Gültigkeit von $\bar{H}_0$.

Lösung: In der neuen Situation sprechen große Werte von $\bar{x}$ eher für die Gültigkeit von $\bar{H}_0$. Also werden wir uns gegen $\bar{H}_0$ entscheiden, falls das arithmetische Mittel der Stichprobe zu klein ist. Da auch in dieser Situation

$$T(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{n}}{s}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\right)$$

annähernd $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt ist, lehnen wir $\bar{H}_0$ ab, falls $T(x_1, \dots, x_n) < u_{1-\alpha}$ ist, wobei $u_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Fraktil von $\mathcal{N}(0,1)$ ist.

Aufgabe 48

Biologin B. möchte die Theorie überprüfen, das der Nachwuchs der Amerikanischen Walddrossel an Gewicht verliert, sobald er sein Nest verlässt. Es ist bekannt, dass die Amerikanische Walddrossel ca. 30 Tage nach dem Schlüpfen ihr Nest verlässt und dabei ein durchschnittliches Gewicht von $48g$ hat. B. fängt nun $n = 20$ Amerikanische Walddrosseln jeweils 10 Tage nach dem Verlassen des Nests und stellt fest, dass diese 20 Vögel ein durchschnittliches Gewicht von $\bar{x} = 44.3g$ bei einer empirischen Standardabweichung von $s = 4.3$ haben.
Nehmen Sie vereinfachend an, das es sich dabei um eine Stichprobe einer Normalverteilung handelt und ermitteln Sie mit Hilfe eines geeigneten Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob Amerikanische Walddrosseln 10 Tage nach Verlassen des Nests in der Tat weniger als $48g$ wiegen.

Hinweis: Ist Z eine t_{19}-verteilte Zufallsvariable, so gilt

$$P(Z \leq -1.729) \ \leq \ 0.05.$$

Lösung: Wir wollen die Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 48 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu < 48$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ testen. Da wir hier bei relativ geringem Stichprobenumfang ($n = 20$) die Varianz aus den gegebenen Daten schätzen müssen, können wir keinen Gauß-Test anwenden. Stattdessen verwenden wir den einseitigen t-Test (für eine Stichprobe).
Beim t-Test müssen wir anstelle der Normalverteilung die t_{n-1}-Verteilung für unsere Testgröße $\frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{x} - \mu)$ verwenden (hier ist $n = 20$, also verwenden wir die t_{19}-Verteilung).
Weiter ist nach dem Hinweis für eine t_{19}-verteilte Zufallsvariable Z

$$P(Z \leq -1.729) \ \leq \ 0.05.$$

Es gilt:

$$\frac{\sqrt{n}}{s}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\right) \approx \frac{\sqrt{20}}{4.3}(44.3 - 48) \approx 1.040 \cdot (-3.7) \approx -3.848 < -1.729,$$

d.h. H_0 kann abgelehnt werden.