Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

24. Juni 2008

12. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. Let (P, M, G, q, σ) ein Hauptfaserbündel. Wir nennen einen Diffeomorphismus $\varphi \in \mathrm{Diff}(P)$ *projizierbar*, wenn ein Diffeomorphismus φ_M von M existiert mit $\varphi_M \circ q = q \circ \varphi$. Entsprechend nennen wir $X \in \mathcal{V}(P)$ projizierbar, wenn ein Vektorfeld $X_M \in \mathcal{V}(M)$ existiert mit $T(q) \circ X = X_M \circ q$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathrm{Diff}(P, q)$ der projizierbaren Diffeomorphismen von P ist eine Untergruppe von $\mathrm{Diff}(P)$.

(b) Ist $\varphi \in \mathrm{Diff}(P, q)$ mit $\varphi_M = \mathrm{id}_M$, so hat φ die Gestalt $\varphi(p) := \varphi_f(p) := p.f(p)$ für eine glatte Funktion f.

(c) Im allgemeinen ist eine Abbildung der Gestalt φ_f kein Diffeomorphismus von P. Hinweis: Betrachte das Hauptfaserbündel $(\mathbb{R}, \{*\}, \mathbb{R}, q, \sigma)$.

(d) Die Menge $\mathcal{V}(P, q)$ der projizierbaren Vektorfelder auf P ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathcal{V}(P)$. ■

Aufgabe 2. Sei (P, M, G, q, σ) ein flaches Hauptfaserbündel über der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit und $q_M \colon \widetilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung. Zeigen Sie: Das zurückgezogene G-Bündel $q_M^* P \to \widetilde{M}$ ist trivial. Hinweis: 6.3.12. ■

Aufgabe 3. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, $q_M \colon \widetilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung und G eine Lie-Gruppe. Wir wollen G-Bündel über M konstruieren, deren pullback auf $\widetilde{M}$ trivial ist, die aber i.a. nicht flach sind. Zeigen Sie:

(1) Die Menge $C^\infty(\widetilde{M}, G)$ ist eine Gruppe bzgl. der punktweisen Multiplikation.

(2) Durch $(\alpha(d).f)(x) := f(d^{-1}.x)$ wird ein Homomorphismus

$$\alpha \colon \pi_1(M) \cong \mathrm{Deck}(\widetilde{M}, q) \to \mathrm{Aut}(C^\infty(\widetilde{M}, G))$$

definiert.

(3) Ist $f \in Z^1(\pi_1(M), C^\infty(\widetilde{M}, G))_\alpha$ ein verschränkter Homomorphismus, so ist

$$(f, \mathrm{id}) \colon \pi_1(M) \to \mathrm{Aut}(\widetilde{M} \times G) \cong C^\infty(\widetilde{M}, G) \rtimes \mathrm{Diff}(\widetilde{M})$$

ein Homomorphismus und durch

$$d.(x,g) := (d.x, f(d)(dx)g)$$

wird eine Wirkung von $\pi_1(M)$ auf $\widetilde{M} \times G$ definiert.

(4) Der Bahnraum $P_f := \widetilde{M} \times_f G := (\widetilde{M} \times G)/\pi_1(M)$ ist ein G-Bündel über M.

(5) Das Bündel $q_M^* P_f$ über $\widetilde{M}$ ist trivial. ■

Aufgabe 4. Wir betrachten ein Beispiel zur Situation aus Aufgabe 3. Sei dazu $G = \mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}^\times$, $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2$ und $q_M \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass

$$f \colon \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(M) \to C^\infty(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \mathbb{T}), \quad f(n,m)([x,y]) := e^{2\pi i n y}$$

einen verschränkten Homomorphismus definiert. Wir schreiben P_f für das hierdurch definierte $\mathbb{T}$-Bündel über M. Man kann zeigen, dass dieses Bündel nicht flach ist, dass sich die natürliche Wirkunge von $\mathbb{R}^2$ bzw. auf M zu einer Wirkung der dreidimensionalen Heisenberggruppe H auf P_f liften lässt und H eine nicht triviale Erweiterung von $\mathbb{R}^2$ ist. ■

Aufgabe 5. Wir nennen ein allgemeines Faserbündel (B, M, F, q) über der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M flach, wenn es einen Homomorphismus

$$\chi \colon \pi_1(M) \to \mathrm{Diff}(F)$$

gibt, so dass $B \cong M \times_\chi F$ das zugehörige assoziierte Bündel ist. Zeigen Sie:

(1) Das Möbiusband B (Exs. 1.1.4/5) ist ein flaches Bündel über $\mathbb{S}^1$ und bestimmen Sie $\chi \colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Diff}(]-1,1[)$.

(2) Die Kleinsche Flasche K (Ex. 1.1.4/5) ist eine flaches $\mathbb{S}^1$-Bündel über $\mathbb{S}^1$ und bestimmen Sie $\chi \colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$. ■

Aufgabe 6. Sei $\mathfrak{h}$ eine Lie-Algebra, V ein $\mathfrak{g}$-Modul und $\sigma \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus. Wir nenne eine Kokette $\omega \in C^p(\mathfrak{h}, V)$ *σ-horizontal*, wenn

$$i_{\sigma(x)}\omega = 0$$

für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt. Sie heißt $\mathfrak{g}$-invariant, wenn zusätzlich

$$\mathcal{L}_{\sigma(x)}\omega = 0$$

für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt. Zeigen Sie: Die Unterräume $C^p(\mathfrak{h}, V)^{\mathfrak{g}}_{\mathrm{hor}}$ der $\mathfrak{g}$-invarianten σ-horizontalen Koketten bilden einen Unterkomplex von $(C^p(\mathfrak{h}, V), \mathtt{d})$, d.h.,

$$\mathtt{d}\big(C^p(\mathfrak{h}, V)^{\mathfrak{g}}_{\mathrm{hor}}\big) \subseteq C^{p+1}(\mathfrak{h}, V)^{\mathfrak{g}}_{\mathrm{hor}}. \qquad ■$$