Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

17. Juni 2008

11. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. Auf einer Lie-Gruppe G betrachten wir die Rechtsmultiplikation $\rho_g\colon G \to G$ mit g. Zeigen Sie:

$$\delta(\rho_g) = \mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ \kappa_G.$$

Welche Konsequenz hat dies für Menge $\mathcal{C}(G)$ der Zusammenhangsformen auf dem Bündel $P = G$ über $M = \{*\}$? ∎

Aufgabe 2. Sei $\sigma\colon P \times G \to P$ eine glatte Rechtswirkung und $f\colon P \to G$ äquivariant, d.h., $f(p.g) = f(p)g$ für $p \in P$ und $g \in G$. Zeigen Sie, dass $\delta(f) \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ eine äquivariante 1-Form ist., d.h.,

$$\sigma_g^* \delta(f) = \mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ \delta(f).$$ ∎

Aufgabe 3. Sei $(\mathbb{V}, M, V, q)$ ein Vektorbündel und

$$\omega \in \Omega^k(M, \mathbb{V}) = \mathrm{Alt}^k_{C^\infty(M)}(\mathcal{V}(M), \Gamma\mathbb{V})$$

eine $\mathbb{V}$-wertige k-Form sowie $U \subseteq M$ offen. Wir wollen die Existenz einer Einschränkung $\omega_U \in \Omega^k(M, \mathbb{V}_U)$ zeigen. Für $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}(U)$ und $m \in M$ sei dazu $\chi : U \to M$ glatt mit kompaktem Träger und $\chi(m) = 1$ in einer Umgebung von m. Dann betrachten wir χX_i als ein globales Vektorfeld in $\mathcal{V}(M)$ und setzen

$$\omega_U(X_1, \ldots, X_k)(m) := \omega(\chi X_1, \ldots, \chi X_k)(m).$$

Zeigen Sie, dass diese Definition nicht von der Wahl der der Funktion χ abhängt. ∎

Aufgabe 4. Sei $P = M \times G$ ein triviales Hauptfaserbündel und $\pi\colon G \to V$ eine glatte Darstellung. Zeigen Sie, dass sich jedes Element $\omega \in \Omega^k(P, V)^G_{\mathrm{hor}}$ darstellen lässt als

$$\omega = (\pi \circ p_G)^{-1}.p_M^* \omega_M \quad \text{für genau ein} \quad \omega \in \Omega^k(M, V).$$

Hierbei sind $p_G\colon M \times G \to G$ und $p_M\colon M \times G \to M$ die Projektionen und für eine glatte Funktion $f\colon P \to G$ und $\alpha \in \Omega^p(P, V)$ sei $(\pi \circ f).\alpha \in \Omega^k(P, V)$ definiert durch $((\pi \circ f).\alpha)_p := \pi(f(p)) \circ \alpha_p$. ∎

Aufgabe 5. Sei $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine glatte Darstellung von G und $d\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ die abgeleitete Darstellung. Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(G, V)$ heißt *äquivariant*, wenn

$$\lambda_g^*\omega = \pi(g) \circ \omega \quad \text{für} \quad g \in G$$

gilt. Wir schreiben $\Omega^k(G, V)^G$ für den Raum der äquivarianten k-Formen. Zeigen Sie:

(a) Die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}\colon \Omega^k(G, V)^G \to C^k(\mathfrak{g}, V), \omega \mapsto \omega_{\mathbf{1}}$ ist ein linearer Isomorphismus.

(b) Ist α äquivariant, so auch $\mathtt{d}\alpha$.

(c) Ist $f_v\colon G \to V$ die äquivariante Funktion mit $f(\mathbf{1}) = v$ und x_l das linksinvariante Vektorfeld mit $x_l(\mathbf{1}) = x$, so gilt

$$x_l.f_v = f_{d\pi(x)v} = f_{x.v}.$$

(d) $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}(\mathtt{d}\alpha) = \mathtt{d}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}\,\alpha)$, d.h., $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}$ induziert einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}\colon (\Omega(G, V)^G, \mathtt{d}) \to (C(\mathfrak{g}, V), \mathtt{d}_{\mathfrak{g}}).$$

■