Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Juni 2008

10. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. Sei $\xi\colon [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$ eine glatte Kurve, für die die Elemente in $\xi([0,1])$ paarweise kommutieren. Zeigen Sie, dass

$$\gamma(t) := e^{\int_0^t \xi(\tau)\,d\tau}, \quad \gamma\colon [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

die eindeutige Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$\gamma(0) = \mathbf{1}, \quad \gamma'(t) = \gamma(t)\xi(t)$$

ist. Schliessen Sie daraus

$$\mathrm{evol}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(\xi) = e^{\int_0^1 \xi(\tau)\,d\tau}.$$

■

Aufgabe 2. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Was ist $\mathrm{evol}_G(\xi)$ für eine konstante Kurve $\xi(t) = x$? ■

Aufgabe 3. Auf $M = \mathbb{C}^\times$ betrachten wir die holomorphe Differentialform $\alpha = \frac{dz}{z} \in \Omega^1(\mathbb{C}^\times, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) α ist geschlossen und berechnen Sie den Periodenhomomorphismus

$$\mathrm{per}_\alpha^1\colon \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \cong \mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

(b) Für welche Überlagerung $q\colon \widehat{M} \to M$ ist $q^*\alpha$ integrabel für $G = \mathbb{C}$? Wie ändert sich die Situation für $G = \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$?

(c) Welche Integrabilitätsbedingung erhalten Sie für $\beta = \frac{dz}{nz}$, $n \in \mathbb{N}$, und $G = \mathbb{C}^\times$? ■

Aufgabe 4. Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Morphismus von Lie-Gruppen. Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{L}(\varphi) := T_{\mathbf{1}}(\varphi)\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

(b) Ist $f\colon M \to G$ glatt, so ist $\delta(\varphi \circ f) = \mathbf{L}(\varphi) \circ \delta(f)$.

(c) Ist $\gamma\colon [0,1] \to G$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = \mathbf{1}$ und $\gamma(1) = g$ sowie $\xi = \delta(\gamma)$, so ist

$$\varphi(g) = \mathrm{evol}_H(\mathbf{L}(\varphi) \circ \delta(\gamma)).$$

■

Aufgabe 5. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine glatte Kurve und $\xi = \delta(\gamma)$. Zeigen Sie:

$$\det(\gamma(1)) = \det(\gamma(0)) e^{\mathrm{tr}(\int_0^1 \xi(\tau)\, d\tau)}.$$

■

Aufgabe 6. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Wir betrachten die Linkswirkung $\lambda_g(x) = gx$ und die Rechtswirkung $\rho_g(x) = xg$ von G auf G. Zeigen Sie:

(a) Die abgeleitete Wirkung von ρ ist

$$\dot\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(G), \quad \dot\rho(x) = x_l, \quad x_l(g) = g.x.$$

(b) Die abgeleitete Wirkung von λ ist

$$\dot\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(G), \quad \dot\lambda(x) = -x_r, \quad x_r(g) = x.g.$$

■

Aufgabe 7. Sei $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine glatte Darstellung von G und $d\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ die abgeleitete Darstellung. Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(G,V)$ heißt *äquivariant*, wenn

$$\lambda_g^* \omega = \pi(g) \circ \omega \quad \text{für} \quad g \in G$$

gilt. Wir schreiben $\Omega^k(G,V)^G$ für den Raum der äquivarianten k-formen. Zeigen Sie:

(a) Die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}\colon \Omega^k(G,V)^G \to C^k(\mathfrak{g},V), \omega \mapsto \omega_{\mathbf{1}}$ ist ein linearer Isomorphismus.

(b) Ist α äquivariant, so auch $\mathtt{d}\alpha$.

(c) Ist $f_v\colon G \to V$ die äquivariante Funktion mit $f(\mathbf{1}) = v$ und x_l das linksinvariante Vektorfeld mit $x_l(\mathbf{1}) = x$, so gilt

$$x_l.f_v = f_{d\pi(x)v} = f_{x.v}.$$

(d) $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}(\mathtt{d}\alpha) = \mathtt{d}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}\,\alpha)$, d.h., $\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}$ induziert einen Isomorphismus von Kettenkomplexen

$$\mathrm{ev}_{\mathbf{1}}\colon (\Omega(G,V)^G, \mathtt{d}) \to (C(\mathfrak{g},V), \mathtt{d}_{\mathfrak{g}}).$$

■