Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

4. Juni 2008

9. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. Beschreiben Sie die Maurer–Cartan-Form $\kappa_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ folgender Lie-Gruppen explizit:
(a) $G = (\mathbb{R}^n, +)$ oder allgemeiner $G = (V, +)$ für einen Vektorraum V.
(b) $G := (\mathbb{R}^\times, \cdot)$.
(c) $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. ■

Aufgabe 2. Sei G eine Lie-Gruppe mit der Multiplikation $m_G: G \times G \to G$ und der Inversion $\eta_G: G \to G$. Zeigen Sie:
(1) Für $g, h \in G$ und $v \in T_g(G)$, $w \in T_h(G)$, gilt

$$T_{(g,h)}(m_G)(v, w) = T_g(\rho_h)v + T_h(\lambda_g)w =: v.h + g.w.$$

(2) $T_{\mathbf{1}}(\eta_G)x = -x$ für $x \in \mathfrak{g} = T_{\mathbf{1}}(G)$.
(3) $T(m_G): TG \times TG \cong T(G \times G) \to TG$ definiert auf TG die Struktur einer Lie-Gruppe. (T ist ein Funktor und macht als solcher aus Gruppen wieder Gruppen)
(4) Die Projektion $q: T(G) \to G$ ist ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Gruppen. Was ist sein Kern? Der Nullschnitt $\sigma: G \to TG, g \mapsto 0_g$ ist ein Homomorphismus mit $q \circ \sigma = \mathrm{id}_G$. ■

Aufgabe 3. Sei G eine Lie-Gruppe, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma: J \to G$ eine differenzierbare Kurve in G. Zeigen Sie, dass die Relation

$$\gamma^*\kappa_G = \xi \cdot dt \quad \text{in} \quad \Omega^1(J, \mathfrak{g}) = C^\infty(J, \mathfrak{g}) \cdot dt$$

äquivalent ist zur "linearen Differentialgleichung"

$$\gamma'(t) = \gamma(t).\xi(t).$$ ■

Aufgabe 4. (Flüsse linksinvarianter Vektorfelder) Sei G eine Lie-Gruppe und $x_l \in \mathcal{V}(G)$ das linksinvariante Vektorfeld mit $x_l(\mathbf{1}) = x$. Zeigen Sie:
(a) $\Phi^X_{st} = \Phi^{sX}_t$ für jedes Vektorfeld $X \in \mathcal{V}(M)$ (M eine Mannigfaltigkeit).
(b) $\gamma_x: \mathbb{R} \to G, \gamma_x(t) := \exp_G(tx) := \Phi^{tx_l}_1(\mathbf{1})$, ist ein Gruppenhomomorphismus.
(c) Die lokalen Flussabbildungen $\Phi^{x_l}_t$ vertauschen mit allen Linksmultiplikationen λ_g.
(d) $\Phi^{x_l}_t(g) = g \exp_G(tx)$ ist der Fluß von x_l. ■

Aufgabe 5. (Abgeleitete Wirkung) Sei $\sigma: G \times M \to M$ eine glatte Wirkung der Lie-Gruppe G auf der Mannigfaltigkeite M und $x \in \mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass $\dot{\sigma}(x)$ genau dann in dem Punkt $m \in M$ verschwindet, wenn m unter der Wirkung der Einparametergruppe $\exp_G(\mathbb{R}x)$ fest bleibt. ■

Aufgabe 6. (Abgeleitete Wirkung) Sei $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und $M = \mathbb{S}^2$. Dann wird durch $\sigma(g, v) := gv$ eine glatte Linkswirkung definiert. Bestimmen Sie die abgeleitete Wirkung $\dot{\sigma}: \mathfrak{g} = \{x \in M_3(\mathbb{R}): x^\top = -x\} \to \mathcal{V}(\mathbb{S}^2)$. Interpretieren Sie die Nullstellen der Vektorfelder $\dot{\sigma}(x)$ geometrisch. Was wissen Sie über die Geometrie der Wirkung von Elemente von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ bzw. ihrer Einparametergruppen auf $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{S}^2$? ■

Aufgabe 7. (Abgeleitete Wirkung) Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\sigma: G \times M \to M, \quad \sigma(g, v) := g.v := \frac{gv}{\|gv\|}$$

wird eine glatte Linkswirkung definiert ($\|\cdot\|$ steht für die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$). Interpretieren Sie die Formel geometrisch.

(b) Was bedeutet es, dass $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ein Fixpunkt von $g \in G$ ist?

(c) Ist $x = x^\top \in \mathbf{L}(G) = M_n(\mathbb{R})$, so besitzt die Einparametergruppe $\exp_G(tx)$ einen Fixpunkt in $\mathbb{S}^{n-1}$. Man kann sogar zeigen, dass für jedes $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ die Kurve $\exp_G(tx).v$ für $t \to \infty$ gegen einen Fixpunkt konvergiert. Wie macht man das? ■