Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

28. Mai 2008

8. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. (1-Kozykel und verschränkte Homomorphismen) Seien $\mathfrak{g}$ and V Lie-Algebren sowie $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{der}(V)$ ein Homomorphismus. Wir bilden dann die semidirekte Summe $V \rtimes_\alpha \mathfrak{g}$ mit der Lie-Klammer

$$[(v,x),(v',x')] := ([v,v'] + \alpha(x)v' - \alpha(x')v, [x,x']).$$

Eine lineare Abbildung $f\colon \mathfrak{g} \to V$ heißt *verschränkter Homomorphismus* (crossed homomorphism), wenn

$$(f, \mathrm{id}_\mathfrak{g})\colon \mathfrak{g} \to V \rtimes_\alpha \mathfrak{g}$$

ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist. Das sind dann genau die homomorphen Schnitte der Quotientenabbildung $q\colon V \rtimes_\alpha \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Zeigen Sie:

(a) Ist V abelsch, so ist f genau dann ein verschränkter Homomorphismus, wenn $f \in Z^1(\mathfrak{g}, V)$, also wenn f ein 1-Kozyklus ist.

(b) Im allgemeinen ist f genau dann ein verschränkter Homomorphismus, wenn f die Maurer–Cartan-Gleichung
$$\mathsf{d}_\mathfrak{g} f + \frac{1}{2}[f,f] = 0$$
erfüllt.

(c) Ist $\alpha = 0$, so ist f genau dann ein verschränkter Homomorphismus, wenn f ein Homomorphismus ist.

(d) Jede Unteralgebra $\mathfrak{a} \subseteq V \rtimes_\alpha \mathfrak{g}$ mit $q(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a} \cap V = \{0\}$ ist Graph genau eines verschränkten Homomorphismus $f\colon \mathfrak{g} \to V$.

(e) (Deformation von Homomorphismen) Sei $\beta\colon \mathfrak{g} \to V$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Wir definieren $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{der}(V)$ durch $\alpha(x) := \mathrm{ad}(\beta(x))$. Sei $(\beta_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine differenzierbare Familie von Homomorphismen $\mathfrak{g} \to V$ mit $\beta_0 = \beta$. Dann ist $f := \frac{d}{dt}|_{t=0}\beta_t \in Z^1(\mathfrak{g}, V)_\alpha$. ■

Aufgabe 2. Sei $q\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ eine abelsche Erweiterung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ durch den $\mathfrak{g}$-Modul V. Zeigen Sie, dass diese Erweiterung genau dann trivial ist (d.h. es existiert ein Homomorphismus $q\colon \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ mit $q \circ \sigma = \mathrm{id}_\mathfrak{g}$), wenn die Lecomte-Abbildung

$$C_1\colon \mathrm{Hom}(V,V)^\mathfrak{g} \to H^2(\mathfrak{g}, V), \quad C_1(\varphi) = [\varphi \circ R_\sigma], \quad R_\sigma(x,y) = [\sigma(x), \sigma(y)] - \sigma([x,y]),$$

verschwindet. Hinweis: Betrachte $\varphi = \mathrm{id}_V$. ■

Aufgabe 3. (Polynome und multilineare Abbildungen) Sei $U \subseteq V$ offen und W ein endlichdimensionaler Vektorraum. Für eine C^{k+1}-Abbildung $f\colon U \to W$ definiert man die k-te Ableitung in x durch

$$(\mathtt{d}^k f)_x(h_1, \ldots, h_k) := \frac{\partial^k}{\partial t_1 \cdots \partial t_k}|_{t_i=0} f(x + t_1 h_1 + \ldots + t_k h_k).$$

Zeigen Sie:
(a) $(\mathtt{d}^k f)_x$ ist eine symmetrische k-lineare Abbildung $V^k \to W$.
(b) Ist $U = V$ und f ein homogenes Polynom vom Grad k, so ist

$$f(x) = \frac{1}{k!}(\mathtt{d}^k f)_0(x, \ldots, x) \quad \text{für} \quad x \in V.$$

Man kann also jedes Polynom durch eine symmetrische k-lineare Abbildung beschreiben. Diesen Prozess nennt man *Polarisierung.* ■

Aufgabe 4. Auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$, $\dim V < \infty$, wird für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch

$$f_k(x) := \operatorname{tr}(x^k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

ein Polynom definiert. Zeigen Sie:
(a) Die Zugehörige k-lineare symmetrische Abbildung ist

$$\widetilde{f}_k(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{tr}(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}).$$

(b) $\widetilde{f}_k\colon \mathfrak{gl}(V)^k \to \mathbb{R}$ ist invariant bzgl. der adjungierten Wirkung von $\mathfrak{gl}(V)$ auf sich durch $x.y := [x, y]$ und der trivialen Wirkung auf $\mathbb{R}$. Hinweis: Betrachte zuerst den Fall $k = 1$.
(c) Wir betrachten nun den Fall $\dim V = 2$. Für jedes $x \in \mathfrak{gl}(V)$ ist dann

$$x^2 - (\operatorname{tr} x)x + \det x \cdot \mathbf{1} = 0$$

(wieso?). Schliessen Sie daraus

$$\det x = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(x^2) - \operatorname{tr}(x)^2).$$

Die Determinante liefert also kein "neues" invariantes Polynom.
(d) $\operatorname{tr}(x^3) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} x \operatorname{tr}(x^2) + (\operatorname{tr} x)^3)$.
(e) Ist $\dim V = n$, so kann man zeigen, dass die Polynome f_k, $k \leq n$, die Algebra der invarianten Polynome auf $\mathfrak{gl}(V)$ erzeugen. Wie sieht man, dass die Polynome $f_k, k > n$, in der Algebra liegen, die von $f_0, f_1, \ldots, f_n$ erzeugt wird? ■