Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21. Mai 2008

7. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. Wir betrachten die dreidimensionale reelle Heisenberg–Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ mit der Basis P, Q und Z und der Lie-Klammer:

$$[P,Q] = Z, \quad [P,Z] = [Q,Z] = 0.$$

Zeigen Sie:
(1) $\mathfrak{h}$ ist eine nicht-triviale zentrale Erweiterung der abelschen Lie-Algebra $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{R}$.
(2) Finden Sie eine Basis von $C(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ und beschreiben Sie $\mathsf{d}\colon C(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \to C(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ in dieser Basis bzgl. der trivial Modulstruktur $x.v = 0$ auf $\mathbb{R}$.
(3) Bestimmen Sie eine Basis der Kohomologieräume $H^p(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ und verifizieren Sie die Relation

$$\dim H^p(\mathfrak{h},\mathbb{R}) = \dim H^{3-p}(\mathfrak{h},\mathbb{R})$$

(Poincaré-Dualität). ■

Aufgabe 2. (Struktur der symmetrischen Gruppe) Für $n = p+q$, $p,q > 0$, betrachten wir die symmetrische Gruppe S_n und schreiben

$$S_{p,q} := \{\sigma \in S_n\colon \sigma(\{1,\ldots,p\}) = \{1,\ldots,p\}\}.$$

Zeigen Sie:
(1) $S_{p,q} \cong S_p \times S_q$ als Gruppen.
(2) Jedes Element $\sigma \in S_n$ besitzt einen eindeutige Zerlegung $\sigma = \sigma_0\sigma_1$ mit $\sigma_1 \in S_{p,q}$ und $\sigma_0 \in \mathrm{Sh}(p,q)$ (die Menge der Shuffles).
(3) Sei $\sigma \in S_n$ definiert durch $\sigma(i) := \begin{cases} i+q & \text{für } i \leq p \\ i-p & \text{für } i > p. \end{cases}$ Berechnen Sie die Signatur $\mathrm{sgn}(\sigma)$. ■

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{g}$ ein Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Für $\alpha_i \in \mathrm{Alt}^{p_i}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, $i = 1,2,3$, gilt

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = \frac{1}{p_1!p_2!p_3!} \mathrm{Alt}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3).$$

(b) Verallgemeinern Sie (a) auf den Fall von n Faktoren.

(c) Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}^*$ gilt

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)(x_1, \ldots, x_n) = \det(\alpha_i(v_j))_{i,j=1,\ldots,n}. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 4. Sei $A = A_{\overline{0}} \oplus A_{\overline{1}}$ eine $\mathbb{Z}/2$-graduierte assoziative Algebra, d.h., $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ für $i,j \in \mathbb{Z}/2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Man nennt A dann auch eine assoziative Superalgebra. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$[a_i, a_j] := a_i a_j - (-1)^{ij} a_j a_i, \quad a_i \in A_i, a_j \in A_j,$$

wird auf A die Struktur einer Lie-Superalgebra definiert. Achtung: $[a_{\overline{1}}, a_{\overline{1}}] = 2a_{\overline{1}}^2$.

(b) Ist $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$ ein 2-graduierter Vektorraum, so erhalten wir eine 2-Graduierung auf $\mathrm{End}(V)$ durch

$$\mathrm{End}(V)_{\overline{0}} := \mathrm{Hom}(V_{\overline{0}}, V_{\overline{0}}) \oplus \mathrm{Hom}(V_{\overline{1}}, V_{\overline{1}}), \qquad \mathrm{End}(V)_{\overline{1}} := \mathrm{Hom}(V_{\overline{0}}, V_{\overline{1}}) \oplus \mathrm{Hom}(V_{\overline{1}}, V_{\overline{0}})$$

eine 2-Graduierung und damit die Struktur einer Lie-Superalgebra.

(c) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Wir wenden (b) auf den 2-graduierten Vektorraum

$$C(\mathfrak{g}, V) = C(\mathfrak{g}, V)^{\mathrm{even}} \oplus C(\mathfrak{g}, V)^{\mathrm{odd}}$$

an. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{\mathfrak{g}} := \mathrm{span}\{i_x : x \in \mathfrak{g}\} + \mathbb{R}\mathtt{d} + \mathrm{span}\{\mathcal{L}_x : x \in \mathfrak{g}\} \subseteq \mathrm{End}(C(\mathfrak{g}, V))$$

eine Lie-Super-Unteralgebra ist mit

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\overline{0}} = \{\mathcal{L}_x : x \in \mathfrak{g}\}, \quad \widehat{\mathfrak{g}}_{\overline{1}} = \{i_x : x \in \mathfrak{g}\} + \mathbb{R}\mathtt{d},$$

sowie den Relationen

$$[i_x, \mathtt{d}] = \mathcal{L}_x, \quad [i_x, i_y] = 0, \quad [\mathtt{d}, \mathtt{d}] = 0,$$
$$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y] = \mathcal{L}_{[x,y]}, \quad [\mathcal{L}_x, \mathtt{d}] = 0, \quad [\mathcal{L}_x, i_y] = i_{[x,y]}. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 5. ($\mathfrak{gl}(V)$ als zentrale Erweiterung) (a) Eine zentrale Erweiterung $q: \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ mit Kern $\mathfrak{z}$ ist genau dann trivial, wenn $\mathfrak{z} \cap [\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}] = \{0\}$ gilt.

(b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Wir betrachtenn die zentrale Erweiterung

$$\mathbf{0} \to \mathbb{K}\mathbf{1} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V) \twoheadrightarrow \mathfrak{pgl}(V) := \mathfrak{gl}(V)/\mathbb{K}\mathbf{1} \to \mathbf{0}.$$

Zeigen Sie: Diese zentrale Erweiterung ist genau dann trivial, wenn $\dim V < \infty$ und die Charakteristik von $\mathbb{K}$ entweder 0 ist oder nicht $\dim V$ teilt. Hinweis: Ist $\dim V = \infty$, so enthält V einen Unterraum, der zur Polynomalgebra $\mathbb{K}[X]$ isomorph ist. Betrachte nun die Operatoren

$$P(f) = f' \quad \text{und} \quad Q(f) = Xf.$$

Falls $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ die Zahl $n := \dim V < \infty$ teilt, identifiziere V mit $\mathbb{K}[X]/(X^n)$. Zeige dann, dass P und Q lineare Abbildungen $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ auf V induzieren mit $[\overline{P}, \overline{Q}] = \mathbf{1}$. $\blacksquare$