Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Mai 2008

6. Übung Differentialtopologie SS 2008

Aufgabe 1. Sei (P, M, G, q, σ) ein Hauptfaserbündel und $\tau: G \times F \to F$ die triviale Wirkung von G auf F. Zeigen Sie, dass das assoziierte Bündel $P \times_\tau F$ trivial ist. ■

Aufgabe 2. (Das Kotangentialbündel als assoziiertes Bündel) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $(\mathrm{Fr}(M), M, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), q)$ ihr Rahmenbündel. Zeigen Sie:

(a) Ist $\pi = \mathrm{id}$ die identische Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so definiert

$$\Phi: \mathrm{Fr}(M) \times_\pi \mathbb{R}^n \to TM, \quad [(\alpha, v)] \mapsto \alpha(v)$$

eine Bündeläquivalenz. Hinweis: Betrachte die Situation lokal bzgl. einer Karte (φ, U) von M.

(b) Ist $\pi(g)(\alpha) = \alpha \circ g^{-1}$ die duale Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ auf $(\mathbb{R}^n)^*$, so erhalten wir für jedes $p \in M$ einen linearen Isomorphismus

$$\Phi_p: (\mathrm{Fr}(M) \times_\pi (\mathbb{R}^n)^*)_p \to (T_p(M))^*, \quad [(\alpha, \beta)] \mapsto \beta \circ \alpha^{-1}.$$

Hierdurch identifiziert man das Kotangentialbündelt $T^*(M)$ mit $\mathrm{Fr}(M) \times_\pi (\mathbb{R}^n)^*$.

(c) Ist $\pi(g)(\alpha)(v, w) = \alpha(g^{-1}v, g^{-1}w)$ die Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ auf $V := \mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, so erhalten wir für jedes $p \in M$ einen linearen Isomorphismus

$$\Phi_p: (\mathrm{Fr}(M) \times_\pi V)_p \to \mathrm{Sym}^2(T_p(M), \mathbb{R}), \quad [(\alpha, \beta)] \mapsto \beta \circ (\alpha^{-1}, \alpha^{-1}).$$

Daher identifiziert man das Bündel $\mathrm{Sym}^2(TM)$ mit $\mathrm{Fr}(M) \times_\pi V$. ■

Aufgabe 3. Da wir das Bündel $\mathrm{Alt}^k(TM, V)$ als assoziiertes Bündel

$$\mathrm{Fr}(M) \times_\pi \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n, V)$$

definiert haben, lässt sich der Raum $\Omega^k(M, V) = \Gamma(\mathrm{Alt}^k(TM, V))$ der V-wertigen k-Formen auf M mit dem Raum $C^\infty(\mathrm{Fr}(M), \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n, V))^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$ der äquivarianten Funktionen identifizieren (Prop. 1.6.3). Zeigen Sie, dass die Funktion α_ω, die zu $\omega \in \Omega^p(M, V)$ gehört, durch

$$\alpha_\omega(\varphi) := \varphi^*\omega_p := \omega_p \circ (\varphi, \ldots, \varphi) \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathrm{Fr}(M)_p = \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, T_p(M))$$

gegeben ist. ■

Aufgabe 4. Seien V and W Vektorräume. Für $v \in V$ definieren wir lineare Abbildungen

$$i_v\colon \mathrm{Alt}^p(V,W) \to \mathrm{Alt}^{p-1}(V,W), \quad (i_v\alpha)(v_1,\ldots,v_{p-1}) := \alpha(v,v_1,\ldots,v_{p-1}).$$

Verifizieren Sie die Relation $i_v i_w + i_w i_v = 0$ für $v,w \in V$. ■

Aufgabe 5. Sei (ρ, V) eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf V und $\omega \in \mathrm{Alt}^p(\mathfrak{g}, V)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathtt{d}\omega(x_0,\ldots,x_p) &:= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j x_j \cdot \omega(x_0,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,x_p) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([x_i,x_j],x_0,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,x_p) \end{aligned}$$

alternierend ist. ■

Aufgabe 6. Sei (ρ, V) eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf V, also ein Homomorphismus $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Auf dem Dualraum erhalten wir durch $\rho^*(x)\alpha := -\alpha \circ \rho(x)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$.

(b) Für jeden Vektorraum W erhalten wir auf dem Raum $\mathrm{Mult}^p(V,W)$ der W-wertigen p-linearen Abbildung eine Darstellung durch

$$(\rho(x)\beta)(v_1,\ldots,v_p) := -\sum_{j=1}^{p}\beta(v_1,\ldots,v_{j-1},\rho(x)v_j,v_{j+1},\ldots,v_p).$$

(c) Der Unterraum $\mathrm{Alt}^p(V,W) \subseteq \mathrm{Mult}^p(V,W)$ ist unter der Darstellung von $\mathfrak{g}$ aus (b) invariant. ■