Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

7. Mai 2008

5. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. Wir betrachten die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$, die wir uns als Vereinigung der Komplemente U_1 (der Südpols) und U_2 des Nordpols vorstellen. Dann ist

$$U_1 \cong U_2 \cong \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

und der Kartenwechsel ist $\psi\colon U_{12} := U_1 \cap U_2 \to U_{12}, \psi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ (4. Übung, P3). Wir interessieren uns für G-Bündel auf $\mathbb{S}^n$, die durch die offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ trivialisiert werden (man kann zeigen, dass dies für alle G-Bündel der Fall ist, da beide U_i zusammenziehbar sind). Zeigen Sie:

(1) $\check{C}^0(\mathcal{U}, U) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n, G)^2$.
(2) $\check{Z}^1(\mathcal{U}, U) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, G)$.
(3) Unter den Identifizierungen (1) und (2) wirkt die Gruppe $\check{C}^0(\mathcal{U}, G)$ auf $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ durch $((h_1, h_2).f)(x) = h_1(x)f(x)h_2(\psi(x))^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(4) Das durch $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, G)$ definierte Bündel P_f erhält man durch Verkleben von $\mathbb{R}^n \times G$ mit sich selbst gemäß der Identifikation

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times G \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times G, \quad (x, g) \mapsto (\psi(x), f(x)g).$$

(5) P_f ist genau dann trivial, wenn es glatte Funktionen $h_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, G)$ gibt, mit $f(x) = h_1(x)^{-1}h_2(\psi(x))$ für alle x.
(6) Sind f oder $f \circ \psi$ fortsetzbar zu einer glatten Funktion auf ganz $\mathbb{R}^n$, so ist P_f trivial. ■

Aufgabe 2. (Bündel zu diskreten Gruppen) Sei G eine diskrete Gruppe und $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit M, für die alle Mengen U_i zusammenhängend sind. Zeigen Sie:

(a) $\check{C}^0(\mathcal{U}, G) \cong G^I$.
(b) Sind auch alle $U_{ij} = U_i \cap U_j$ zusammenhängend, so ist

$$\check{Z}^1(\mathcal{U}, G) \cong \{(g_{ij}) \in G^{I\times I}\colon (\forall i, j, k)\ U_{ijk} \neq \emptyset \Rightarrow g_{ik} = g_{ij}g_{jk}\}.$$

(c) Gilt zusätzlich zu (b) $I = \{1,2\}$, so sind $\check{C}^0(\mathcal{U}, G) \cong G^2$, $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G) \cong G$ und es gilt $\check{H}^1(\mathcal{U}, G) = \{[\mathbf{1}]\}$. Bei welchen Sphären $\mathbb{S}^n$ ist diese Bedingungen erfüllt? (vergl. Aufgabe 1).

(d) Ist $I = \{1,2\}$ und zerfällt U_{12} in zwei Zusammenhangskomponenten, so haben wir

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, G) \cong G^2, \quad \check{Z}^1(\mathcal{U}, G) \cong G^2 \quad \text{mit} \quad (h_1, h_2).(g_1, g_2) = (h_1 g_1 h_2^{-1}, h_1 g_2 h_2^{-1}).$$

In diesem Fall lässt sich die Menge $\check{H}^1(\mathcal{U}, G)$ mit der Menge $\mathrm{Conj}(G)$ der Konjugationsklassen in G identifizieren. Hieraus kann man schliessen, dass

$$\check{H}^1(\mathbb{S}^1, G) \cong \mathrm{Conj}(G)$$

gilt. Ist G abelsch, ist insbesondere $\check{H}^1(\mathbb{S}^1, G) \cong G$. ■

Aufgabe 3. (Holomorphe Linienbündel über der Riemann Sphäre) Wir betrachten jetzt die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ als komplexe 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, die wir uns wieder als Vereinigung der Komplemente $U_i \cong \mathbb{C}$ der beiden Pole denken, diesmal aber mit dem holomorphen Kartenwechsel

$$\psi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, \psi(z) = z^{-1}.$$

Wir interessieren uns für holomorphe Linienbündel auf $\mathbb{S}^2$, die durch die offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ trivialisert werden (das ist in der Tat für alle der Fall). Solche Bündel erhält man durch Verkleben der beiden trivialen Bündel $U_i \times \mathbb{C}$ mittels einer Abbildung der Gestalt $(z, v) \mapsto (z^{-1}, f(z)v)$, wobei $f\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ eine holomorphe Funktion ist. Sei $\mathbb{V}_f$ das Linienbündel, dass durch diese Vorschrift definiert wird. Zeigen Sie:

(1) Zwei Funktionen f_1 und f_2 definieren genau dann holomorph äquivalente Bündel, wenn es holomorphe Funktionen $h_i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ gibt mit $f_2(z) = h_1(z) f_1(z) h_2(z^{-1})$.

(2) Aus der Funktionentheorie wissen wir (wirklich?), dass sich f in der Gestalt

$$f(z) = z^n e^{g(z)}$$

schreiben lässt, mit $n \in \mathbb{Z}$ (der Windungszahl der Kurve $f|_{\mathbb{S}^1}$) und einer holomorphen Funktion $g\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$. Mittels Laurententwicklung zerlegt man g als $g(z) = g_1(z) + g_2(z^{-1})$ für in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen g_i. Schließen Sie hieraus, dass $\mathbb{V}_f \cong \mathbb{V}_{z^n}$ für das entsprechende Bündel gilt.

(2) Ein holomorpher Schnitt von $\mathbb{V}_f$ wird durch ein Paar holomorpher Funktionen $s_i\colon U_i \cong \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben, für die

$$s_1(z) = f(z)^{-1} s_2(z^{-1}), \quad z \in \mathbb{C}^\times$$

gilt.

(3) Wir betrachten nun den Fall $f(z) = z^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, und interessieren uns für den Raum der holomorphen Schnitte. Zeigen Sie:

 (a) Ist $n \geq 0$, so hat dieser Raum die Dimension $n+1$; die Funktionen s_1 sind beliebige Polynome vom Grad $\leq n$.

 (b) Ist $n < 0$, so gibt es keinen von 0 verschiedenen Schnitt. Hinweis: Der Satz von Liouville liefert, dass f_2 verschwindet.

 (c) Was sagt der Fall $n = 0$ über den Raum der holomorphen Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{S}^2$ aus? ■