Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

30. April 2008

4. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. (Schnitte von pullbacks) Sei (E, B, F, q) ein Faserbündel über B und $f\colon X \to B$ glatt. Zeigen Sie, dass der Raum der glatten Schnitte der F-Bündels f^*X über X durch die Menge

$$\Gamma(f^*X) \cong \{\alpha \in C^\infty(X, E)\colon q \circ \alpha = f\}$$

beschrieben werden kann, indem Sie eine Bijektion angeben. ■

Aufgabe 2. Sei (P, M, G, q, σ) ein Hauptfaserbündel. Zeigen Sie:

(a) Ist $f\colon X \to M$ eine glatte Abbildung, so ist f^*P bzgl. der Wirkung $\sigma_f((x,p), g) := (x,p).g := (x, p.g)$ ein G-Hauptfaserbündel.

(b) Das Hauptfaserbündel P is genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt $\sigma\colon M \to P$ besitzt. Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\widetilde{\sigma}\colon M \times G \to P$, $(m, g) \mapsto \sigma(m)g$.

(c) Das Pullback-Bündel $(q^*P, P, G, p_P, \sigma_q)$ ist trivial als G-Hauptfaserbündel über P. Hinweis: Finde einen globalen Schnitt. ■

Aufgabe 3. Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Z}$-Hauptfaserbündel über $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und einen Vektorraum V. Jedes Element $g \in \mathrm{GL}(V)$ definiert nun eine Darstellung

$$\pi_g\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V), \quad \pi_g(n) = g^n$$

und wir erhalten dazu ein assoziiertes V-Vektorbündel $\mathbb{V}_g = \mathbb{R} \times_{\pi_g} V$ über $\mathbb{S}^1$. Zeigen Sie:

(a) $\Gamma\mathbb{V}_g \cong \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, V)\colon (\forall t \in \mathbb{R})\, f(t+1) = g^{-1}(f(t))\}$.

(b) Wir betrachten den Spezialfall $V = \mathbb{R}$ und $g = -1$. Zeigen Sie, dass jeder Schnitt von $\mathbb{V}_g$ eine Nullstelle besitzt. Insbesondere ist dieses Bündel nicht trivial. Wie kann man sich den Totalraum von $\mathbb{V}_g$ anschaulich vorstellen?

(c) Ist $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ eine glatte Kurve und $h \in \mathrm{GL}(V)$ mit

$$\gamma(t+1) = h^{-1}\gamma(t)g \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

so definiert
$$\varphi_\gamma\colon \mathbb{V}_g \to \mathbb{V}_h, \quad [(t,v)] \mapsto [(t,\gamma(t)v)]$$
eine Bündeläquivalenz und
$$\Phi_\gamma\colon \Gamma\mathbb{V}_g \to \Gamma\mathbb{V}_h, \quad \Phi_\gamma(f)(t) := \gamma(t)f(t)$$
einen linearen Isomorphismus auf der Ebene der Schnitte.

(d) Ist $g \in \mathrm{GL}(V)_0$ in der Zusammenhangskomponente der $\mathbf{1}$, so ist das Bündel $\mathbb{V}_g$ trivial. ∎

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Ist G abelsch und (P,M,G,q,σ) ein Hauptfaserbündel, so ist $\mathrm{Gau}(P) \cong C^\infty(M,G)$, versehen mit der punktweisen Multiplikation. ∎

Aufgabe 5. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offen Überdeckung der Mannigfaltigkeit B, F eine Mannigfaltigkeit und
$$g_{ij}\colon U_{ij} := U_i \cap U_j \to \mathrm{Diff}(F),$$
eine Familie glatter Funktionen mit
$$g_{ii} = \mathbf{1}, \quad g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \quad \text{auf} \quad U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k.$$
Wir betrachten die disjunkte Vereinigung $\widetilde{E} := \dot\bigcup_{i\in I}\{i\} \times U_i \times F$. Zeigen Sie:

(a) Durch $(i,x,f) \sim (j,x,f')$ für $x \in U_{ij}$, $g_{ij}f' = f$ wird auf $\widetilde{E}$ eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) $E := \widetilde{E}/\sim$ trägt genau eine Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, für die die Abbildungen
$$\varphi_i\colon U_i \times F \to E, \quad (x,f) \mapsto [(i,x,f)]$$
Diffeomorphismen mit offenem Bild sind.

(c) $q\colon E \to B, q([(i,x,f)]) := x$ definiert ein F-Faserbündel (E,B,F,q), für das die Abbildungen φ_i, $i \in I$, einen Bündelatlas liefern. ∎

Aufgabe P3. (Ein Atlas der n-Sphäre aus zwei Karten) Sei $e_0 := (1,0,\ldots,0)$ der *Nordpol* der Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $-e_0$ der *Südpol*, wobei $e_0,\ldots,e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$ sei. Wir betrachten die stereographischen Abbildungen
$$\varphi_+\colon U_+ := \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n, \quad (y_0,y) \mapsto \frac{1}{1-y_0}y$$
und
$$\varphi_-\colon U_- := \mathbb{S}^n \setminus \{-e_0\} \to \mathbb{R}^n, \quad (y_0,y) \mapsto \frac{1}{1+y_0}y.$$
Zeigen Sie:

(a) Beide Abbildungen sind bijektiv mit den Umkehrabbildungen
$$\varphi_\pm^{-1}(x) = \Big(\pm \frac{\|x\|_2^2 - 1}{\|x\|_2^2 + 1}, \frac{2x}{1+\|x\|_2^2}\Big).$$

(b) (φ_+,U_+) und (φ_-,U_-) sind Karten von $\mathbb{S}^n$.

(c) Die Karten sind glatt kompatibel:
$$(\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})(x) = (\varphi_- \circ \varphi_+^{-1})(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$
und diese Abbildung, die *Inversion an der Einheitssphäre*, ist glatt. ∎