Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23. April 2008

3. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. (Äquivalenz und Isomorphie) Zeigen Sie: Ist (E, B, F, q) ein Faserbündel, das zu dem trivialen Bündel $(B \times F, B, F, p_B)$ isomorph ist, so ist (E, B, F, q) selbst trivial, also schon äquivalent zu $(B \times F, B, F, p_B)$. ■

Aufgabe 2. Seien (E_i, B_i, F, q_i), $i = 1, 2$, F-Faserbündel und $\varphi_E : E_1 \to E_2$ ein Morphismus von F-Faserbündeln, für den $\varphi_B : : B_1 \to B_2$ ein Diffeomorphismus ist und alle Abbildungen $\varphi_E \,|_{E_{1,b}} : E_{1,b} \to E_{2,\varphi_B(b)}$ Diffeomorphismen sind. Dann ist auch φ_E ein Diffeomorphismus. ■

Aufgabe 3. Ist (P, M, G, q) ein Hauptfaserbündel, so ist die Rechtswirkung

$$P \times G \to P, (p, g) \mapsto p.g$$

von G auf P eigentlich und frei, so dass P/G nach dem Quotientensatz eine natürliche Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt, für die die Projektion $p: P \to P/G$ eine Submersion ist. Die induzierte Abbildung $\overline{q}: P/G \to M, p.G \mapsto q(p)$ ist ein Diffeomorphismus. ■

Aufgabe 4. Sei $q: TM \to M$ das Tangentialbündel der glatten Mannigfaltigkeit M und $\mathrm{Aut}(TM)$ die Gruppe der Vektorbündelautomorphismen von TM. Zeigen Sie: Der Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma: \mathrm{Aut}(TM) \to \mathrm{Diff}(M), \quad \varphi \mapsto \varphi_M$$

is surjektiv und es existiert sogar ein Gruppenhomomorphismus $\sigma: \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Aut}(TM)$ mit $\Gamma \circ \sigma = \mathrm{id}$. Insbesondere ist daher $\mathrm{Aut}(TM) \cong \mathrm{Gau}(TM) \rtimes \mathrm{Diff}(M)$. ■

Aufgabe 5. Sind (E_i, B, F, q_i), $i = 1, 2$, äquivalente F-Bündel über B, d.h., $E_1 \sim E_2$, und $f: X \to B$ eine glatte Abbildung, so ist auch $f^*E_1 \sim f^*E_2$. ■

Aufgabe 6. (Transitivität von pullbacks) Sei (E, B, F, q) ein Faserbündel und $f: X \to Y$, $g: Y \to B$ glatte Abbildungen. Zeigen Sie,

$$(g \circ f)^*E \sim f^*(g^*E),$$

d.h., die beiden Bündel sind als F-Bündel über X äquivalent. ■

Aufgabe 7. (Schnitte von pullbacks) Sei (E, B, F, q) ein Faserbündel über B und $f: X \to B$ glatt. Zeigen Sie, dass der Raum der glatten Schnitte der F-Bündels f^*X über X durch die Menge

$$\Gamma(f^*X) \cong \{\alpha \in C^\infty(X, E): q \circ \alpha = f\}$$

beschrieben werden kann, indem Sie eine Bijektion angeben. ■

Aufgabe 8. Sei (P, M, G, q, σ) ein Hauptfaserbündel. Zeigen Sie:

(a) Ist $f: X \to M$ eine glatte Abbildung, so ist f^*P bzgl. der Wirkung $\sigma_f((x,p), g) := (x,p).g := (x, p.g)$ ein G-Hauptfaserbündel.

(b) Das Hauptfaserbündel P is genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt $\sigma: M \to P$ besitzt. Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\widetilde{\sigma}: M \times G \to P$, $(m, g) \mapsto \sigma(m)g$.

(c) Das Pullback-Bündel $(q^*P, P, G, p_P, \sigma_q)$ ist trivial als G-Hauptfaserbündel über P. Hinweis: Finde einen globalen Schnitt. ■

Aufgabe 9. (Mehr zu 1-Kozykeln) Seien G und N Gruppen sowie $\beta: G \to N$ ein Homomorphismus. Dann wird durch $\alpha(g)(n) := \beta(g)n\beta(g)^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert. Zeigen Sie: Für eine Abbildung $\gamma: G \to N$ ist das Produkt

$$f = \gamma \cdot \beta: G \to N, \quad f(g) := \gamma(g)\beta(g)$$

genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $\gamma \in Z^1(G, N)_\alpha$ ist. ■

Aufgabe P2. (Vektorfelder in lokalen Koordinaten) Sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ ein Atlas von M, d.h., $\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^n$, ist ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Für jedes Indexpaar $i, j \in I$ sei

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad g_{ij}(x) := \mathtt{d}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(x).$$

Mit diesen Abbildungen lässt sich ein glattes Vektorfeld $X \in \mathcal{V}(M)$ durch eine Familie glatter Funktionen $X_i \in C^\infty(U_i, \mathbb{R}^n)$ beschreiben, die der Transformationsregel

$$X_i = g_{ij} \cdot X_j \quad \text{auf} \quad U_i \cap U_j$$

genügen. ■