Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16. April 2008

2. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. (Kleinsche Flasche) In der Vorlesung haben wir die Kleinsche Flasche als Quotienten $K := \mathbb{R}^2/\Gamma$ konstruiert, wobei $\Gamma = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle_{\mathrm{Grp}} \subseteq \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$ von den Elementen

$$\sigma_1(x,y) = (x+1, -y) \quad \text{und} \quad \sigma_2(x,y) = (x, y+1)$$

erzeugt wurde. Zeigen Sie, dass die Gruppe Γ auf $\mathbb{R}^2$ frei und eigentlich operiert, so dass $\mathbb{R}^2/\Gamma$ nach dem Quotientensatz eine natürliche Mannigfaltigkeitsstruktur trägt. ∎

Aufgabe 2. Jede glatte Wirkung $\sigma\colon G \times M \to M$ einer kompakten Lie-Gruppe G ist eigentlich. ∎

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Jede Sphäre $\mathbb{S}^{2n+1}$ ungerader Dimension trägt die Struktur eines $\mathbb{T}$-Hauptfaserbündels und jede Sphäre der Dimension $4n+3$ trägt die Struktur eines $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$-Hauptfaserbündels. Wie kann man die Quotienten $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{T}$ und $\mathbb{S}^{4n+3}/\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ geometrisch beschreiben? ∎

Aufgabe 4. (Schnitte von semidirekten Produkten) Seien N und G Gruppen und $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus sowie $\widehat{G} := N \rtimes_\alpha G$ die zugehörige semidirekte Produktgruppe und $q\colon \widehat{G} \to G, (n,g) \mapsto g$ der Quotientenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Jeder Homomorphismus $s\colon G \to \widehat{G}$ hat die Gestalt $s(g) = (f(g), g)$, wobei $f\colon G \to N$ ein *(Links-)1-Kozyklus* oder *verschränkter Homomorphismus* (crossed homomorphism) ist, d.h.,

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) \cdot \alpha(g_1)(f(g_2)).$$

Wir schreiben $Z^1(G,N)_\alpha$ für die Menge der 1-Kozykel bzgl. α.

(b) Wir nennen zwei verschränkte Homomorphismen $f_1, f_2\colon G \to N$ *äquivalent*, wenn ein $n \in N \cong N \times \{\mathbf{1}\}$ existiert, so dass für die zugehörigen Schnitte s_1 und s_2 die Relation

$$s_2(g) = n s_1(g) n^{-1} \quad \text{für alle} \quad g \in G$$

gilt. Zeigen Sie:

(1) Diese Relation ist äquivalent zu: $f_2(g) = nf_1(g)\alpha(g)(n^{-1})$.

(2) Durch $(n.f)(g) := nf(g)\alpha(g)(n^{-1})$ wird eine Wirkung der Gruppe N auf $Z^1(G,N)_\alpha$ definiert. Der Bahnraum

$$H^1(G,N)_\alpha := Z^1(G,N)_\alpha/N$$

dieser Wirkung heißt *erste Kohomologiemenge von G mit Werten in N*. Sie ist i.a. keine Gruppe, besitzt aber die Klasse des trivialen Kozyklus $\mathbf{1}$ (konstante Funktion) als einen natürlichen Basispunkt.

(c) Ist N abelsch, so definiert die punktweise Multiplikation auf $Z^1(G,N)$ die Struktur einer abelschen Gruppe und $H^1(G,N)$ ist eine Quotientengruppe. In diesem Fall heißen die Elemente von $Z^1(G,N)_\alpha$ 1-Kozykel und $H^1(G,N)_\alpha$ die *erste Kohomologiegruppe von G mit Werten in N*. ■

Aufgabe 5. (Affine Gruppenwirkungen) Sei V ein Vektorraum und $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung der Gruppe G auf V. Zeigen Sie:

(1) Für jeden 1-Kozyklus $f \in Z^1(G,V)_\rho$ wird auf V eine affine Wirkung $\sigma_f(g)(v) := \rho(g)v + f(g)$ definiert.

(2) Die affine Wirkung σ_f hat genau dann einen Fixpunkt, wenn der Kozyklus f ein Korand ist, also von der Form $f(g) = \rho(g)v - v$ für ein $v \in V$.

(3) Ist G endlich, so ist $H^1(G,V)_\rho = \{0\}$. ■

Aufgabe 6. (Links und Rechts-Kozykel) Sei $\widehat{G} = N \rtimes_\alpha G$ wie in Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(1) Die Abbildung $G \times N \to \widehat{G}, (g,n) \mapsto (\mathbf{1}, g)(n, \mathbf{1})$ wird zu einem Gruppenisomorphismus, wenn wir die Multiplikation auf $G \times N$ durch

$$(g,n)(g',n') := (gg', \alpha(g')^{-1}(n)n')$$

definieren. Wir schreiben $G \ltimes_\alpha N$ für diese Gruppe.

(2) Eine Abbildung $s\colon G \to G \rtimes_\alpha N, s(g,n) = (g, f(g))$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn $f\colon G \to N$ ein *Rechts-Kozyklus* ist, d.h.,

$$f(g_1g_2) = \alpha(g_2)^{-1}(f(g_1))f(g_2) \quad \text{für alle} \quad g_1, g_2 \in G.$$ ■

Aufgabe 7. Wir betrachten die Gruppen $G := \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$ und $N := C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$, wobei die Gruppenstruktur auf N durch die punktweise Multiplikation gegeben ist. Dann wird durch $\alpha(\varphi)(f) := f \circ \varphi^{-1}$ ein Homomorphismus $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(N)$ definiert. Die Zuordnung der Jacobimatrix

$$J\colon \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})), \quad J(\varphi) := \Big(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

ist ein Rechtskozyklus bzgl. α. ■

Aufgabe P1. (für Physiker) Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit $G = NH$ und $N \cap H = \{\mathbf{1}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\alpha(h)(n) := hnh^{-1}$ definiert einen Homomorphismus $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$.

(b) Die Multiplikationsabbildung $\mu\colon N \rtimes_\alpha H \to G, (n,h) \mapsto nh$ ist ein Gruppenisomorphismus. Man nennt G daher auch das semidirekte Produkt der Untergruppen N und H. ■