Prof. Dr. Karl–H. Neeb
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe
Algebra, Geometrie, Funktionalanalysis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
DARMSTADT

9. April 2008

1. Übung Differentialtopologie
SS 2008

Aufgabe 1. (Glätten von Überlagerungen) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, N ein Hausdorffraum und $q\colon N \to M$ ein lokaler Homöomorphismus, d.h., jeder Punkt $p \in N$ hat eine offene Umgebung U_p, die von q homöomorph auf eine offene Teilmenge von M abgebildet wird. Zeigen Sie: Auf N existiert genau eine Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, für die q ein lokaler Diffeomorphismus ist. ■

Aufgabe 2. Finden Sie einen lokalen Homöomorphismus, der keine Überlagerung ist. ■

Aufgabe 3. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige injektive Abbildung lokalkompakter Räume. Dann ist f genau dann eigentlich, wenn $f(X)$ abgeschlossen ist und f eine topologische Einbettung, also ein Homöomorphismus auf $f(X)$. ■

Aufgabe 4. Sei $\sigma\colon G \times M \to M$ eine freie stetige Wirkung der Lie-Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M. Dann wirkt G genau dann eigentlich auf M, wenn für jede Folge $(g_n, p_n) \in G \times M$, für die $(g_n.p_n, p_n)$ in $M \times M$ konvergiert, auch die Folge (g_n) in G konvergiert. ■

Aufgabe 5. Sei Γ eine diskrete Gruppe, die frei durch Diffeomorphismen auf der Mannigfaltigkeit M operiert. Wir versehen den Bahnraum $M/\Gamma = \{\Gamma.m\colon m \in M\}$ mit der Quotiententopologie und schreiben $q\colon M \to M/\Gamma$ für die Quotientenabbildung. Zeigen Sie: q ist genau dann eine Überlagerung, wenn Γ eigentlich diskontinuierlich wirkt, d.h., für jedes Paar kompakter Teilmengen $K, Q \subseteq M$ ist die Menge $\{\gamma \in \Gamma\colon \gamma(K) \cap Q \neq \emptyset\}$ endlich. ■

Aufgabe 6. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $G = \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ and $M_{k,d}(\mathbb{K})$ die Algebra der $(k \times d)$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Wir nehmen an, dass $k \geq d$ ist. Zeigen Sie:

(1) Die Menge $M := \{A \in M_{k,d}(\mathbb{K}) \colon \operatorname{rk} A = d\}$ ist offen.

(2) G operiert auf M von rechts durch $\sigma(A, g) := Ag$ (Matrixmultiplikation) und diese Wirkung ist glatt und frei.

(3) σ ist eigentlich: Wir wollen Aufgabe 4 verwenden und gehen dazu wie folgt vor:

  (a) Wir schreiben $A_n = \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}$ als Blockmatrix mit $C_n \in M_{d,d}(\mathbb{K})$ und $D_n \in M_{k-d,d}(\mathbb{K})$ and analog $A = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$. Dann gilt $C_n g_n \to E$ und $D_n g_n \to F$ sowie $C_n \to C$ und $D_n \to D$. Ist nun C invertierbar, so auch C_n für fast alle n und es gilt $C_n^{-1} \to C^{-1}$ und $g_n \to C^{-1}E$.

  (b) Führen Sie den allgemeinen Fall auf (a) zurück und wenden Sie Aufgabe 4 an.

(4) Zeigen Sie, warum man den Quotientenraum M/G mit der Graßmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{d,n}(\mathbb{K})$ der d-dimensionalen Unterräume in $\mathbb{K}^n$ identifizieren kann. Wieso trägt dieser Raum eine natürliche Mannigfaltigkeitsstruktur?

(5) Sind V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\dim V \leq \dim W$, so erhält die Menge $\mathrm{Gr}_V(W)$ aller Unterräume von W, die isomorph zu V sind, eine Mannigfaltigkeitsstruktur, indem man sie mit $\mathrm{Emb}(V, W)/\,\mathrm{GL}(V)$ identifiziert (hierbei ist $\mathrm{Emb}(V, W)$ die Menge aller injektiven linearen Abbildungen $V \to W$). ■