TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2008
14.05.08

3. Aufgabenblatt zur Vorlesung
Einführung in die numerische Finanzmathematik

Aufgabe G1: Es sei F die Menge der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\sup_t |f(t)| \leq 1$. Zeigen Sie: Für den Lösungsoperator $S(f) = \int_0^1 f(s)ds$ ist für *jeden* deterministischen (BSS–)Algorithmus M

$$\sup_{f \in F} |S(f) - M(f)| \geq 1 \ .$$

(*Hinweis:* Analog zum in der Vorlesung behandelten Zählproblem.)

Aufgabe G2: Eine *amerikanische Put–Option* gibt dem Käufer das Recht, aber nicht die Pflicht, eine Aktie innerhalb eines Zeitraumes zu einem festgesetzten Preis K zu verkaufen. Es gibt viele verschiedene mögliche Ausübungsstrategien; formulieren Sie (in Pseudo–Code) eine Methode, um die Effizienz der Strategien zu vergleichen.

Aufgabe G3: Aus der Chebychev–Ungleichung folgt für die Fehlerwahrscheinlichkeiten einer MC–Methode:

$$\mathbb{P}\left(|M(f) - S(f)| > t\right) \leq t^{-2} \cdot \Delta^2(M, f).$$

Überlegen Sie, ob diese Abschätzung für den Fall der direkten Simulation und große n suboptimal oder scharf sein könnte.

Aufgabe T1: Betrachten Sie das auf dem 1.Blatt verwandte Modell zur Bestimmung von π durch Wahl zufälliger Punkte im Einheitskreis und Auszählung der im Viertelkreis gelandeten. Analysieren Sie die Methode in Bezug auf die Varianz. Gibt es implementierbare Modifikationen, welche die Varianz verkleinern?

Aufgabe T2: Es sei $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ stetig mit $\sup_t |f(t)| \leq C$. Bestimmen Sie für die klassische Monte–Carlo–Methode M_n mit n Simulationen ein möglichst kleines $n = n(C, t, \delta)$, sodaß

$$\mathbb{P}\left(|M_n(f) - \int f(x)dx| > t\right) \leq \delta \ .$$

Aufgabe P1: Das einfachste populäre Finanzmarktmodell ist das *Cox–Ross–Rubinstein–* oder CRR–Modell. Ein einzelner Aktienkurs wird über diskrete Zeiten $\{0, \ldots, N\}$ wie folgt modelliert: $A_0 > 0$ ist gegeben (z.B. $A_0 = 100$), und

$$A_n = A_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} Y_i = A_{n-1} \cdot Y_n \ ,$$

wobei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine i.i.d.–Folge von positiven Zufallsgrößen ist.[1] Im einfachsten Fall wählt man $r > 0$ (Zinssatz), $0 < u < 1 + r < d$, $p = (1 + r - d)/(u - d)$, und setzt

$$\mathbb{P}\,(Y_i = u) = p, \qquad \mathbb{P}\,(Y_i = d) = 1 - p \ .$$

Erstellen Sie einen Code zur Simulation[2] und eine Monte–Carlo–Simulation, um den erwarteten (mit $(1{+}r)^{-T}$ abdiskontierten!) Payoff[3] eines europäischen Calls zu berechnen. Testen Sie dies mit den Werten $A_0 = 1$, $T = 1000$, $u = 1.01$, $d = 0.99$, $r = 6 \cdot 10^{-5}$, und dem strike price $K = 0.5$.

Aufgabe P2: Implementieren Sie in Ihrem CRR-Modell auch die Ausübung einer *up–and–out*–Option mit Auszahlungsfunktion

$$c(A) = (A_T - K)^+ \cdot (\max(A_i) \leq L)$$

(man darf also die Option, wie eine europäische Option, ausüben, wenn der Kurs unter L bleibt, ansonsten (up) verfällt sie (you're out)). Suchen Sie ein L, sodaß der erwartete Payoff der Option für $K = 0.5$ ungefähr die Hälfte des erwarteten Payoffs der europäischen Option ist. Automatisieren Sie die Suche, wenden Sie sie für eine Reichweite von K–Werten an, und suchen Sie nach einer möglichen approximativen funktionalen Beziehung.

Aufgabe P3: Wie viele fixpunktfreie Permutationen gibt es ungefähr in S_{1000}?

Aufgabe P4: Implementieren Sie eine Simulation der Gleichverteilung auf dem Simplex

$$D_d = \Big\{(x_1, \ldots, x_d) \ : \ x_i \geq 0, \sum_i x_i \leq 1\Big\} \ ?$$

Testen Sie Ihre Implementierung mit $d = 100$.

---

[1] Anders gesagt, ist $\log A_n$ einfach ein random walk.

[2] octave, Matlab, R,..

[3] Für exakt diese Wahl von p ist dies auch der *faire Preis* der Option.