TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2008
02.05.08

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung
Einführung in die numerische Finanzmathematik

Aufgabe T1: Wir betrachten die Problemmenge $F = \{0,1\}^N$ mit dem Lösungsoperator $S_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{i\le N} f(i)$. Untersuchen Sie die direkte Simulationsmethode

$$M_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{i\le n} f(X_i)$$

mit X_i iid gleichverteilt auf $\{1,\dots,N\}$ auf Bias und Varianz.

Aufgabe T2: Nun sei $N = k\cdot n$, und $X_1,\dots,X_n$ seien auf $\{1,\dots,k\}$ iid gleichverteilt. Weiter sei

$$\nu_i(f) := \frac{1}{k}\sum_{i=ik+1}^{i(k+1)} f(i)\ .$$

Zeigen Sie, daß der durch

$$\widetilde{M}_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{i\le n} f(X_i + (i-1)k)$$

definierte Algorithmus erwartungstreu ist und

$$\sigma^2(\widetilde{M}_n(f)) = \sigma^2(M_n(f)) - n^{-2}\sum_{i=0}^{n-1}(\nu_i(f) - S(f))^2\ .$$

Wann sind M_n und $\widetilde{M}_n$ ähnlich effizient, wann ist $\widetilde{M}_n$ deutlich effizienter?

Aufgabe T3 (Box–Muller–Methode): Es sei $\Pi : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to (0,\infty)\times[0,2\pi)$ die Polarkoordinatenabbildung mit Umkehrabbildung Π^{-1}.

(i) Sei X Z.vektor in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ und Y Z.vektor in $(0,\infty)\times[0,2\pi[$. Dann ist $Y = \Pi(X) \Leftrightarrow X = \Pi^{-1}(Y)$.

(ii) Zeigen Sie: Ist $Y = (E, U)$ mit U gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$, $E \sim \mathrm{Exp}(1)$, und E, U unabhängig, so ist $X = \Pi^{-1}(Y)$ $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_2)$–verteilt. (*Hinweis:* Sei X_0 standardnormal; (i) nutzen, um mit brutaler Gewalt die Dichte von $\Pi(X_0)$ zu bestimmen.)

Aufgabe P1: Implementieren Sie die Methoden aus T1 und T2, und nutzen Sie sie, um die Anzahl an teilerfremden Zahlen in $\{1, \dots, k\}^2$ für $k = 8^8$, $k = 9^9$ und $k = 10^{10}$ zu schätzen.

Aufgabe P2: Suchen Sie nach einer Beschreibung von Marsaglia's *rectangle–wedge–tail*–Methode zur Erzeugung von Normalverteilungen; implementieren Sie diese und die Box–Muller–Methode aus T3, und erstellen Sie einen simplen benchmark. (Vergessen Sie dabei nicht, dass die Box–Muller–Methode immer zwei unabhängige normalverteilte Größen liefert.)