TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2004
20.04.04

1. Aufgabenblatt zur Vorlesung
Einführung in die numerische Finanzmathematik

Gruppenübungen:

Aufgabe G1: Wir betrachten einen linearen Kongruenzgenerator der Form

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \mod m \, .$$

(i) Bestimmen Sie die Folge für den Fall $m = 10$, $x_0 = a = c = 7$.

(ii) Finden Sie ein Beispiel mit $m = 10$, in welchem x_0 nur als Startwert auftaucht.

(iii) Ist es eine gute oder eine schlechte Idee, a, m teilerfremd zu wählen?

(iv) Zeigen Sie

$$x_{n+k} = (a^k x_n + c \cdot (a^k - 1)/(a - 1)) \mod m \, .$$

Aufgabe G2 (diskrete aus stetigen Verteilungen):

(i) Wie kann man aus $[0, 1]$–verteilten Zufallsgrößen diskrete Zufallsgrößen gewinnen?

(ii) Welche Möglichkeit sehen Sie, dies Verfahren möglichst effizient zu gestalten?

(iii) 'Implementieren' Sie ein Verfahren mit Stift und Papier fuer die $b(5, 0.4)$–Verteilung. Die gerundeten Werte stehen in folgender Tabelle:

x	$\mathbb{P}(X = x)$
0	0.168
1	0.360
2	0.309
3	0.132
4	0.028
5	0.003

'Testen' Sie Ihre 'Implementierung' mit folgenden 'Zufallszahlen':

0.031	0.638	0.135	0.445	0.952
0.805	0.870	0.221	0.139	0.567
0.167	0.047	0.683	0.361	0.968
0.086	0.721	0.454	0.376	0.437
0.129	0.502	0.286	0.536	0.451
0.427	0.372	0.971	0.621	0.388

Aufgabe G3 (Die Verwerfungsmethode): Eine messbare Teilmenge $A \subseteq [0,1]^d$ mit $\mathrm{vol}_d(A) = \lambda_d(A) > 0$ ist gegeben, $\lambda_d(A)$ soll geschätzt werden.

(i) Wenn Sie perfekte Zufallszahlen auf $[0,1]$ (nicht sofort auf $[0,1]^d$!) erzeugen können, wie könnte man $\lambda_d(A)$ mittels Simulationen schätzen?

(ii) Wenden Sie ihre Idee auf den Kreis im Einheitsquadrat an, um mittels 20 Durchläufen $\pi/4$ (sehr) näherungsweise bestimmen zu können. (Zur Vereinfachung der 'Simulation' habe ich ein Blatt in viele Quadrate unterteilt und nehme an, daß ein zufälliges Tippen auf das Blatt – modulo des getoffenen Kästchens – zu einer Gleichverteilung im Einheitskästchen führt.)

Heimübungen:

Aufgabe P1: Finden Sie heraus, welche Algorithmen Ihr bevorzugtes Mathematikprogramm zur Zufallszahlenerzeugung nutzt. Unterziehen Sie den Output einigen statistischen Tests.

Aufgabe P2: Ein Kasino bietet folgendes Spiel an: In jeder Runde wird mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1/2]$ der eingesetzte Gewinn verdoppelt, mit W.keit $1-p$ ist er verloren. Sie starten mit einem Starkapital S und wollen ein Zielkapital $K > S$ erreichen. Sie spielen also so lange, bis Sie mindestens K Kapital haben, oder bankrott sind (dann werden Sie vor die Tür gesetzt.) Überlegen Sie sich zwei (oder mehr) verschiedene Strategien, simulieren Sie (für von Ihnen gewählte Werte für S, K, p) jeweils tausend Durchläufe und bewerten Sie die Strategien anhand der Ergebnisse.

Aufgabe P3: In einer Schadensversicherung wird folgendes Modell genutzt: Die Wartezeiten zwischen Schadensereignissen bilden eine Folge $(W_i)_{i=1}^{\infty}$ von unabhängigen, $Exp(\lambda)$–verteilten Zufallsgrößen. Die Schadenshöhe sei sei stets 1. Der Schadensprozeß ist also gegeben durch

$$\forall t \in [0, \infty[\, : N_t = k \ \Leftrightarrow W_1 + \cdots + W_k \leq t < W_1 + \cdots + W_{k+1} \, .$$

Die Versicherung erhalte kontinuierlich Prämienzahlungen mit der Rate ρ; bis zur Zeit t sind also ρt an Prämien eingegangen. Weiter hat die Versicherung ein Anfangskapital K. Nun will die Versicherung wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie pleite geht, also bis zu einem Zeitpunkt $T > 0$ das Ereignis

$$N_t > \rho t + K$$

eintritt. Implementieren Sie eine Simulation von N_t (vorzugsweise in R, Matlab, Maple oder MuPAD) und bestimmen Sie für selbstgewählte Werte für λ, ρ, K und T approximative Näherungen für die Wahrscheinlichkeiten durch Simulationsexperimente.

Aufgabe P4: Der Raum der Permutationen S_n hat die Größe $n!$. Wie können Sie mit Hilfe der Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, n\}$ die Gleichverteilung auf S_n effizient simulieren?

Aufgabe T1 (stetige aus diskreten Verteilungen): Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d.–Folge von auf $\{0, 1\}$ gleichverteilten Zufallsgrößen ('zufälligen Bits').

(i) Zeigen Sie, daß der (fast sicher existente) Grenzwert

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot X_i$$

eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsgröße ist.
(*Hinweis:* Es genügt zu zeigen, daß die Verteilungsfunktion auf einer dichten Teilmenge von $[0, 1]$ gleich der Identität ist.)

(ii) Der *Wasserstein–Abstand* einer Zufallsgröße X zu einer Verteilung ν ist wie folgt erklärt: $d(X, \nu) \leq \varepsilon$ genau dann, wenn es eine gemäß ν verteilte Zufallsgröße Y gibt mit $\mathbb{E}|X - Y| \leq \varepsilon$. Folgern Sie aus (i): Für die endliche Summe

$$X_n = \sum_{i\leq n} 2^{-i} X_i$$

ist $d(X_n, \lambda_1) \leq 2^{-n}$. (Tatsächlich gilt hier viel mehr.)

Aufgabe T2: (random number recycling, Bakhvalov 1964) Es seien U, V zwei unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsgrößen. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$Y_n = (U + nV) - \lfloor U + nV \rfloor \ .$$

Zeigen Sie:

(i) Jedes Y_n ist auf $[0, 1]$ gleichverteilt.

(ii) Je zwei Y_n, Y_k sind unabhängig.