TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2008
02.05.08

2. Aufgabenblatt zur Vorlesung Einführung in die numerische Finanzmathematik

Aufgabe T1: Wir betrachten die Problemmenge $F = \{0,1\}^N$ mit dem Lösungsoperator $S_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{i\leq N} f(i)$. Untersuchen Sie die direkte Simulationsmethode

$$M_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} f(X_i)$$

mit X_i iid gleichverteilt auf $\{1,\ldots,N\}$ auf Bias und Varianz.

Lösung: Da X_i gleichverteilt sind, gilt $\mathbb{E}\, f(X_i) = S_N(f)$, und damit ist M_n erwartungstreu. Weiter gilt wegen der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
\sigma^2(M_n(f)) &= n^{-2}\sum_{i\leq n}\sigma^2(f(X_i)) \\
&= n^{-2}\sum_{i\leq n}(S_N(f) - S_N^2(f)) \\
&= n^{-1}S_N(f)(1-S_N(f))
\end{aligned}$$

;.

Aufgabe T2: Nun sei $N = k\cdot n$, und $X_1,\ldots,X_n$ seien auf $\{1,\ldots,k\}$ iid gleichverteilt. Weiter sei

$$\nu_i(f) := \frac{1}{k}\sum_{j=ik+1}^{i(k+1)} f(j)\ .$$

Zeigen Sie, daß der durch

$$\widetilde{M}_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{i\leq n} f(X_i + (i-1)k)$$

definierte Algorithmus erwartungstreu ist und

$$\sigma^2(\widetilde{M}_n(f)) = \sigma^2(M_n(f)) - n^{-2}\sum_{i=0}^{n-1}(\nu_i(f) - S(f))^2\ .$$

Wann sind M_n und $\widetilde{M}_n$ ähnlich effizient, wann ist $\widetilde{M}_n$ deutlich effizienter?

Lösung: Jedes $(X_i + (i-1)k$ ist gleichverteilt auf $(i-1)k+1, \ldots, ik$, daher folgt $\mathbb{E}\, f(X_i + (i-1)k) = k^{-1} \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} f(j)$, also

$$\mathbb{E}\,(\widetilde{M}_n(f)) = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} f(j) = S_N(f) \ .$$

Analog zur ersten Aufgabe ergibt sich weiter

$$\sigma^2(\widetilde{M}_n(f)) = n^{-2} \sum_{i<n} \nu_i(f)(1-\nu_i(f)) \ .$$

Damit erhalten wir

$$\sigma^2(M_n(f)) - \sigma^2(\widetilde{M}_n(f)) = n^{-2} \sum_{i<n} (S_N - S_N^2 + \nu_i^2 - \nu_i) \ .$$

Wir bemerken, daß

$$\sum_{i<n} \nu_i = nS_N = \sum_{i<n} S_N \ ,$$

und ebenso

$$\sum_{i<n} \nu_i S_N = \sum_{i<n} S_N^2 \ ,$$

sodaß wir ersetzen können:

$$\sigma^2(M_n(f)) - \sigma^2(\widetilde{M}_n(f)) = n^{-2} \sum_{i<n} (\nu_i^2 - S_N^2) = n^{-2} \sum_{i<n} (\nu_i^2 - 2\nu_i S_N + S_N^2) \ .$$

Damit folgt die Behauptung. Der Ausdruck $\sum_i (\nu_i - S_N)^2$ mißt den quadratischen Abstand der 'lokalen Mittel' zum globalen Mittel. Sind alle lokalen Mittel gleich S_N, so ist der Ausdruck minimal, nämlich Null. Variieren die lokalen Mittel sehr stark, so ist der Term größer; das Maximum ist bei $\nu_1 = nS_N$, $\nu_i = 0$ sonst gegeben, in diesem Falle erhält man als Differenz

$$2 * n^{-2} * (n-1) * S_N(f)^2 \ .$$

Aufgabe T3 (Box–Muller–Methode): Es sei $\Pi : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to (0,\infty) \times [0, 2\pi)$ die Polarkoordinatenabbildung mit Umkehrabbildung Π^{-1}.

(i) Sei X Z.vektor in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ und Y Z.vektor in $(0,\infty)\times[0,2\pi[$. Dann ist $Y \stackrel{d}{=} \Pi(X) \Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} \Pi^{-1}(Y)$.

(ii) Zeigen Sie: Ist $Y = (\sqrt{E}, U)$ mit U gleichverteilt auf $[0,2\pi)$, $E \sim \mathrm{Exp}(1)$, und E, U unabhängig, so ist $X \stackrel{d}{=} \Pi^{-1}(Y)$ $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_2)$–verteilt. (*Hinweis:* Sei X_0 standardnormal; (i) nutzen, um mit brutaler Gewalt die Dichte von $\Pi(X_0)$ zu bestimmen.)

Lösung: (i) Das folgt sofort aus dem Transformationssatz.

(ii) Wir zeigen $\Pi(X) \stackrel{d}{=} Y$. Dazu transformieren wir die Dichte. Die Polarkoordinatenabbildung $\Pi(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \pi + 2\arctan x/y))$ transformiert die Dichte der Standardnormalverteilung

$$p(x,y) = (2\pi)^{-1}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

mittels des Transformationssatzes zur Dichte

$$q(r,\phi) = p(\Pi^{-1}(r,\phi)) \cdot r = (2\pi)^{-1} r e^{-r^2} \; .$$

Andererseits ist nach dem Transformationssatz auch die Dichte von $(\sqrt{E}, U)$ gleich

$$u(r,\phi) = (2\pi)^{-1}e^{-r^2} r \; .$$

Damit folgt die Behauptung.