TU Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Jakob Creutzig

SS 2004
20.04.04

Lösungen zum 1. Aufgabenblatt zur Vorlesung
Einführung in die numerische Finanzmathematik

Gruppenübungen:

Aufgabe G1: Wir betrachten einen linearen Kongruenzgenerator der Form

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \mod m .$$

(i) Bestimmen Sie die Folge für den Fall $m = 10$, $x_0 = a = c = 7$.

(ii) Finden Sie ein Beispiel mit $m = 10$, in welchem x_0 nur als Startwert auftaucht.

(iii) Ist es eine gute oder eine schlechte Idee, a, m teilerfremd zu wählen?

(iv) Zeigen Sie

$$x_{n+k} = (a^k x_n + c \cdot (a^k - 1)/(a - 1)) \mod m .$$

Lösung: (i) $7, 6, 9, 0, 7$; da der Generator nur auf den letzten Wert von x_n zugreift, wiederholt sich diese Folge beständig.

(ii) $m = 10, a = 4, c = 1, x_0 = 2$. Dann ist x_0 gerade, und jedes weitere x_n ungerade; genauer ist die Sequenz $2, 9, 7, 9, 7, 9, ...$

(iii) Wenn $r = ggt(a, m) > 1$, so ist für jedes x die Zahl $ax + c \mod m$ in $\{c, c + r, c + 2r, \ldots, m - r + c\}$, also durchläuft dann die Folge nur eine Teilmenge von $\{1, \ldots, m\}$. Das ist keine gute Idee.

(iv) Per Induktion über k: Es ist $(a^k - 1)/(a - 1) = 1 + a + \cdots + a^{k-1}$, und damit

$$\begin{aligned} x_{n+k+1} &= ax_{n+k} + c \mod m \\ &= a(a^k x_n + c(1 + a + \cdots + a^{k-1}) \mod m) + c \mod m \\ &= a^{k+1} x_n + c(1 + a + \cdots a^k) \mod m . \end{aligned}$$

Aufgabe G2 (diskrete aus stetigen Verteilungen):

(i) Wie kann man aus $[0,1]$–verteilten Zufallsgrößen diskrete Zufallsgrößen gewinnen?

(ii) Welche Möglichkeit sehen Sie, dies Verfahren möglichst effizient zu gestalten?

Lösung:

(i) Sei μ diskret auf $\{x_i\ i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ mit diskreter Dichtefunktion $p_i = \mu(\{x_i\})$. Wir setzen $q_i = \sum_{j \leq i} p_i$ und verfahren nach folgendem Algorithmus:

```
t = rand();
i = 1;
while(t > q[i]){i++;}
return(x[i]).
```

(ii) Der obige Algorithmus wird natürlich beschleunigt, wenn man die p_i am Anfang der Größe nach fallend sortiert. Bei einer endlichen Menge von Punkten bietet sich als wesentliche Verbesserung grundsätzlich eine binäre Suche an. Um die hierbei anfallende durchschnittliche Anzahl an Abfragen gering zu halten, wäre es ideal, in jedem Schritt eine Frage zu stellen, welche in der Hälfte der (noch verbleibenden!) Fälle positiv, ansonsten negativ beschieden würde. Man kann also versuchen, die Intervalle der Länge p_i so zu gruppieren, daß dies Ideal zumindest im ersten oder in den ersten beiden Schritten möglichst weitgehend erreicht wird. Eine Erweiterung dieser Idee besteht darin, längere Intervalle aufzuspalten, um eine bessere Uniformität zu erzielen. Dies führt allerdings auch zu einer Erhöhung der Anzahl der Intervalltests, sodaß eine genauere Analyse von Kosten und Nutzen nötig wäre. Wir verweisen auf die angegebene Literatur zur Zufallszahlenerzeugung für weiterführende Überlegungen.

Aufgabe G3 (Die Verwerfungsmethode): Eine messbare Teilmenge $A \subseteq [0,1]^d$ mit $\mathrm{vol}_d(A) = \lambda_d(A) > 0$ ist gegeben, $\lambda_d(A)$ soll geschätzt werden.

(i) Wenn Sie perfekte Zufallszahlen auf $[0,1]$ (nicht sofort auf $[0,1]^d$!) erzeugen können, wie könnte man $\lambda_d(A)$ mittels Simulationen schätzen?

Lösung: Sofern wir eine Methode haben, um für einen Punkt $x \in [0,1]^d$ entscheiden zu können, ob $x \in A$, bietet sich folgende Methode sofort an:

```
x_in_A = false;
```

```
while( ! (x_in_A)){
for(i=1:d){x[i] = rand(); }
x_in_A = is_in_A(x);
} return(x);
```

Es sei R die Zeit, um `is_in_A(x)` auszuführen; dann ist die erwartete Wartezeit im wesentlichen

$$R/\lambda_d(A) \; .$$

Für Mengen A mit kleinem $\lambda_d(A)$ ist diese Methode also nicht sehr empfehlenswert. Hier würde sich z.B. anbieten, die Menge mit einem Gitter aus kleineren Würfeln zu überdecken, mit einem Zweischrittverfahren dann eine Gleichverteilung auf dem Gitter zu simulieren, und dann die Verwerfungsmethode zu nutzen.

Heimübungen:

Aufgabe T1 (stetige aus diskreten Verteilungen): Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d.–Folge von auf $\{0,1\}$ gleichverteilten Zufallsgrößen ('zufälligen Bits').

(i) Zeigen Sie, daß der (fast sicher existente) Grenzwert

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot X_i$$

eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgröße ist.
(*Hinweis:* Es genügt zu zeigen, daß die Verteilungsfunktion auf einer dichten Teilmenge von $[0,1]$ gleich der Identität ist.)

(ii) Der *Wasserstein–Abstand* einer Zufallsgröße X zu einer Verteilung ν ist wie folgt erklärt: $d(X,\nu) \leq \varepsilon$ genau dann, wenn es eine gemäß ν verteilte Zufallsgröße Y gibt mit $\mathbb{E}|X-Y| \leq \varepsilon$. Folgern Sie aus (i): Für die endliche Summe

$$X_n = \sum_{i\leq n} 2^{-i} X_i$$

ist $d(X_n, \lambda_1) \leq 2^{-n}$. (Tatsächlich gilt hier viel mehr.)

Lösung: (i): Zunächst liegt der i–te Summand zwischen 0 und 2^{-i}, also konvergiert die Summe. Es genügt nun, für eine dichte Teilmenge Q von $[0,1]$ zu zeigen: $F_X = id$. Wir wählen dazu die Menge Q der dyadisch rationalen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}, j \leq 2^n$ sei $j = (j_{n-1}\cdots j_0)_2$ die Binärdarstellung. Dann ist $X \leq j/2^n$ genau dann, wenn entweder $X_i = j_{n-i}$ für alle $i \leq n$ und $X_i = 0$ für alle $i > n$, oder wenn $\sum_{i \leq n} 2^{-i} X_i < j/2^n$. Das erste Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 0 (warum?). Die Wahrscheinlichkeit für das zweite Ereignis ist am einfachsten durch Abzählen zu finden: Die Binärdarstellung von $2^n \cdot \sum_{i \leq n} 2^{-i} X_i$ ist gleichverteilt, es gibt 2^n mögliche Ausgänge, und j Ausgänge, in denen ein Wert $< j$ herauskommt (es gibt j Zahlen in $\{0, \ldots, j-1\}$, also j Binärdarstellungen von Zahlen $< j$). Also ist

$$\mathbb{P}\left(X \leq j/2^n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i \leq n} 2^{-i} X_i < j/2^n\right) = j/2^n \ .$$

(ii) X ist gemäß λ_1 verteilt, damit folgt

$$d(X_n, \lambda_1) \leq d(X_n, X) = \mathbb{E} \sum_{i > n} 2^{-i} X_i \leq 2^{-n} \ .$$

Aufgabe T2: (random number recycling, Bakhvalov 1964) Es seien U, V zwei unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsgrößen. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$Y_n = (U + nV) - \lfloor U + nV \rfloor \ .$$

Zeigen Sie:

(i) Jedes Y_n ist auf $[0, 1]$ gleichverteilt.

(ii) Je zwei Y_n, Y_k sind unabhängig.

Lösung: (i) Der Einfachheit halber setzen wir $x \mod 1 := x - \lfloor x \rfloor$. Sei n fest. Als erstes machen wir uns klar, daß ganz allgemein folgendes richtig ist: Wenn X eine Zufallsgröße auf $[0, \infty)$ ist mit Dichte p, so hat $X \mod 1$ die Dichte

$$F(x) = \sum_{i \geq 0} p(x - i) \ .$$

(Denn $X \mod 1 \leq t$ genau dann, wenn ein i existiert mit $i < X \leq i + t$.) Im Falle von $X = U + nV$ ist die Dichte p gegeben durch

$$p(x) = \mathbb{1}_{[0,1]} \star (n^{-1} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) = n^{-1} \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,n]}(x - y) dy \ ,$$

also $p(x) = x/n$ auf $[0, 1]$, $p(x) = 1/n$ auf $[1, n]$, $p(x) = (n - (x - 1))/n$ auf $[n, n + 1]$. Dies ergibt mit obiger Formel leicht

$$F(x) = x, \qquad x \in [0, 1] \ .$$