Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
June 4, 2008

Lineare Algebra II
9. Tutorium

(T 38)

Es seien $\mathbb{K}$ einem Körper, V, W endlichdimensionales $\mathbb{K}$-Vektorräume und $h : V \to W$ ein Homomorphismus. Die zu h *transponierte* Abbildung, $h^t : W^* \to V^*$ ist dann durch $h^t(f) = f \circ h, \forall f \in W^*$ definiert.

(a) Zeigen Sie, daß wenn A die Koordinatenmatrix zu h ist, dann hat die zu h transponierte Abbildung $h^t : W^* \to V^*$ die Koordinatenmatrix A^t.

(b) Zeigen Sie, daß wenn h ein Isomorphismus ist, dann ist h^t auch ein Isomorphismus.

(T 39)

Es seien $\mathbb{K}, V$ und W als in aufgabe T 38 und sei $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform mit Strukturmatrix B bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W. Die *transponierte* von β, $\beta^t : W \times V \to \mathbb{K}$ ist dann durch $\beta^t(y, x) = \beta(x, y), \forall x \in V, \forall y \in W$ definiert und die lineare Abbildungen $\beta_1 : V \to W^*$ und $\beta_2 : W \to V^*$ ist dann durch

$$(\beta_1 x)(y) = \beta(x, y),\ \forall x \in V,\ y \in W \qquad \text{und} \qquad (\beta_2 y)(x) = \beta(x, y),\ \forall x \in V,\ y \in W$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, daß β_2 B als Koordinatenmatrix bezüglich der Basen $w_1, \ldots, w_m$ von W und $v_1^*, \ldots, v_n^*$ von V^* hat.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}(V, W) &\to \mathrm{Hom}(W, V^*) \\ \beta &\mapsto \beta_2 \end{aligned}$$

ein kanonisches Isomorphismus von Vektorräumen ist.

(c) Zeigen Sie: Ist W endlich-dimensional und W^{**} mit W identifiziert ist, so hat man für die Transponierte $(\beta_1)^t$ von β_1 die Gleichung:

$$(\beta_1)^t = (\beta^t)_1 = \beta_2.$$

(d) Es sei $\dim V = \dim W$. Zeigen Sie, daß eine Bilinearform $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ist genau dann nicht ausgeartet in der ersten Variablen, wenn sie nicht ausgeartet in der zweiten Variablen ist.

(T 40) Isometrie

Es seien $\mathbb{K}, V$ und W als in aufgabe T 38 und $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Sind $h \in \mathrm{End}(V)$ und $j \in \mathrm{End}(W)$, so ist die Adjungierte von h, $h\hat{}$ bzw. j, $\hat{}j$ durch $\beta(hx, y) = \beta(x, h\hat{}y)$ bzw. $\beta(x, jy) = \beta(\hat{}jx, y)$, $\forall x \in V, \forall y \in W$ definiert.

Sind $s \in \mathrm{End}(V)$ und $t \in \mathrm{End}(W)$, so sagen wir das Paar (s, t) lasse die Bilinearform β invariant, wenn gilt $\beta(sx, ty) = \beta(x, y)$, $\forall x \in V, \forall y \in W$. Zeigen sie, daß wenn $\dim W = \dim V$ und β ein nicht-ausgearte Bilinearform ist, dann sind die folgenden Aussagen Äquivalent:

(i) Das Paar (s,t) lasse β invariant.

(ii) Es gilt $\hat{\ }ts = id_V$.

(iii) s und t sind invertierbar, und es gilt $s^{-1} = \hat{\ }t$ sowie $t^{-1} = s\hat{\ }$.

(iv) Gehören bei fester Basiswahl in V bzw. W zu β, s, t die Matrizen B, S, T, so gilt $B = S^t BT$.

(T 41)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, W, V $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ein Bilinearform. Sind X bzw. Y Teilmenge von V bzw. W, so definieren wir

$$X^{\perp} = \{y \in W \mid \beta(x,y) = 0,\ \forall x \in X\}\,, {}^{\perp}Y \qquad = \{x \in V \mid \beta(x,y) = 0,\ \forall y \in Y\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $X^{\perp} = (\beta_1 X)^o$ und ${}^{\perp}Y = (\beta_2 Y)^o$.

(b) Seien V, W endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ ein Bilinearform. Zeigen Sie, daß ${}^{\perp}W = \text{Kern}(\beta_1)$ und $V^{\perp} = \text{Kern}(\beta_2)$.

(c) Seien V, W endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ein Bilinearform. Zeigen Sie, daß für jede Teilraum $X \subseteq V$ gilt

$$\dim X + \dim X^{\perp} = \dim W + \dim({}^{\perp}W \cap X)$$

(d) Zeigen Sie, daß wenn β nicht-ausgeartet ist, und $\dim V = \dim W$ dann gilt, für ein beliebiges Teilraum $X \subseteq V$

$$\dim X + \dim X^{\perp} = \dim V$$

(e) Es seien jetzt $V = \mathbb{R}^4 \ni (x,y,z,t)$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die durch

$$\beta((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$$

definierte Bilinearform.

  (i) Geben Sie die Strukturmatrix für β an.

  (ii) Ist β ausgeartet oder nicht?

  (iii) Finden Sie ein Teilraum $X \subset V$ so daß $X \oplus X^{\perp} \neq V$.

  (iv) Finden Sie ein Orthogonal-Basis für $V = \mathbb{R}^4$ bezüglich β, daß kein O-Basis bezüglich der Standardskalprodukte ist. D.h. geben Sie Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ an so daß $\beta(v_i, v_j) = 0$ genau wenn $i \neq j$. Gibt es ein ON-Basis bezüglich β für $\mathbb{R}^4$? Für $\mathbb{C}^4$?