Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
May 29, 2008

Lineare Algebra II

9. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 38)

Es seien $\mathbb{K}$ einem Körper, V, W endlichdimensionales $\mathbb{K}$-Vektorräume und $h : V \to W$ ein Endomorphismus. Die zu h *transponierte* Abbildung, $h^t : W^* \to V^*$ ist dann durch $h^t(f) = f \circ h, \forall f \in W^*$ definiert.

(a) Zeigen Sie, daß wenn A die Koordinatenmatrix zu h ist, dann hat die zu h transponierte Abbildung $h^t : W^* \to V^*$ die Koordinatenmatrix A^t.

(b) Zeigen Sie, daß wenn h ein Isomorphismus ist, dann ist h^t auch ein Isomorphismus.

LÖSUNG:

(a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_m$ Basen zu V bzw. W. Aus der Definition folgt $A = (a_{ij})$ mit Spalten $\vec{a_i} = h(v_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^t = a_{1i}w_1 + \ldots + a_{mi}w_m$. Die duale Basen sind $v_1^*, \ldots, v_n^*$ bzw. $w_1^*, \ldots, w_m^*$ zu V^* bzw. W^*. Und die Koordinatenmatrix B für h^t hat die Spaltenvektoren $\vec{b_j} = h^t(w_j^*)$ und $h^t(w_j^*)(v_i) = w_j^*(h(v_i)) = a_{ji}$, also ist $\vec{b_j} = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})^t$ damit ist $B = A^t$.

(b) Sei $f \in \mathrm{Kern}(h^t)$, dann gilt $h^t(f) = 0$, d.h. $f(h(x)) = 0, \forall x \in V$ aber h ist ein Isomorphismus, so $f = 0$.

(T 39)

Es seien $\mathbb{K}, V$ und W als in aufgabe T 38 und sei $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform mit Strukturmatrix B bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W. Die lineare Abbildungen $\beta_1 : V \to W^*$ und $\beta_2 : W \to V^*$ is dann durch

$$(\beta_1 x)(y) = \beta(x, y),\ \forall x \in V,\ y \in W \qquad \text{und} \qquad (\beta_2 y)(x) = \beta(x, y),\ \forall x \in V,\ y \in W$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, daß β_2 B als Koordinatenmatrix bezüglich der Basen $w_1, \ldots, w_m$ von W und $v_1^*, \ldots, v_n^*$ von V hat.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}(V, W) &\to \mathrm{Hom}(W, V^*) \\ \beta &\mapsto \beta_2 \end{aligned}$$

ein kanonisches Isomorphismus von Vektorräumen ist.

(c) Zeigen Sie: Ist W endlich-dimensional und W^{**} mit W identifiziert ist, so hat man für die Transponierte $(\beta_1)^t$ von β_1 die Gleichung:

$$(\beta_1)^t = (\beta^t)_1 = \beta_2.$$

(d) Es sei $\dim V = \dim W$. Zeigen Sie, daß eine Bilinearform $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ist genau dann nicht ausgeartet in der ersten Variablen, wenn sie nicht ausgeartet in der zweiten Variablen ist.

LÖSUNG:

(a) Wir haben, daß $B = (b_{ij})$ wobei $b_{ij} = \beta(v_i, w_j)$. Der Koordinatenmatrix ,$C = (c_{ij})$ für β_2 hat als Spalten die Vektoren $\vec{c} = \beta_2 w_j$. Hier ist $\beta_2 w_j(v_i) = \beta(v_i, w_j) = b_{ij}$, also ist $C = B$.

(b) Das die Abb. Basisunabhängig ist, ist klar, wir mussen damit nur zeigen, daß es eine Isomorphismus ist. Sei $\beta \in \text{Kern}(\beta \mapsto \beta_2)$, d.h. $\beta_2 = 0$, d.h. $\beta_2 w_i(v_j) = 0$ für jede Paar auf Basisvektoren w_i, v_j aber $\beta_2(w_i)(v_j) = \beta(v_j, w_i)$ und wenn β nicht Null ist gibt's sicher w_i, v_j so daß $\beta(v_j, w_i) \neq 0$, also ist $\beta = 0$, also $\text{Kern}(\beta \mapsto \eta_2) = 0$.

(c) Wir haben $\beta_1 : V \to W^*$ und $\beta^t : W \times V \to \mathbb{K}$, $(\beta_1)^t : W^{**} \cong W \to V^*$ und $(\beta^t)_1 : W \to V^*$.

Jetzt ist

$$\left(\beta^t\right)_1 (w_i)(v_j) = \beta^t (w_i, v_j) = \beta (v_j, w_i) = (\beta_2 w_i)(v_j)$$

und mit die Identfizierung $W^{**} \cong W$ gegeben durch $w(f) = f(w)$ für $f \in W^*$ haben wir

$$(\beta_1)^t (w_i)(v_j) = w_i (\beta_1)(v_j) = \beta_1 v_j (w_i) = \beta y (v_j, w_i).$$

(d) Aus der Definition ist β ausgeartet in der ersten Variablen genau wenn

$$\beta(x, y) = 0 \, \forall y \in W \Rightarrow x = 0,$$

oder in anderen worter, genau wenn $\text{Kern}(\beta_1) = \{0\}$. Gleichwiese ist β in der zewiten Variablen ausgeartet genau wenn $\text{Kern}(\beta_2) = \{0\}$. Wenn $\dim V = \dim W$ ist das dann klar, weil wir wissen daß B^t ist die Koordinatenmatrix für β_1 (aus die Vorlesung) und daß B ist die Koordinatenmatrix für β_2(aus (a)) und die Rang von B und B^t ist natürlich die gleiche.

(T 40) Isometrie

Es seien $\mathbb{K}, W$ und W als in aufgabe T 38 und $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Sind $h \in \text{End}(V)$ und $j \in \text{End}(W)$, so ist die Adjungierte von h, $h\hat{}$ bzw. j, $\hat{}j$ durch $\beta(hx, y) = \beta(x, h\hat{}y)$ bzw. $\beta(x, jy) = \beta(\hat{}jx, y)$, $\forall x \in V, \forall y \in W$ definiert.

Sind $s \in \text{End}(V)$ und $t \in \text{End}(W)$, so sagen wir das Paar (s, t) lasse die Bilinearform β invariant, wenn gilt $\beta(sx, ty) = \beta(x, y)$, $\forall x \in V, \forall y \in W$. Zeigen sie, daß wenn $\dim W = \dim V$ und β ein nicht-ausgearte Bilinearform ist, dann sind die folgenden Aussagen Äquivalent:

(i) Das Paar (s, t) lasse β invariant.

(ii) Es gilt $\hat{}ts = id_V$.

(iii) s und t sind invertierbar, und es gilt $s^{-1} = \hat{}t$ sowie $t^{-1} = s\hat{}$.

(iv) Gehören bei fester Basiswahl in V bzw. W zu β, s, t die Matrizen B, S, T, so gilt $B = S^t BT$.

LÖSUNG:

Bei definition gilt für jede $h \in \operatorname{End}(V)$ und $j \in \operatorname{End}(W)$ gibt es $h\hat{} \in \operatorname{End}(W)$ und $\hat{}j \in \operatorname{End}(V)$so daß

$$\beta(hx, y) = \beta(x, h\hat{}y), \forall x \in V,\ y \in W$$

und

$$\beta(x, jy) = \beta(\hat{}jx, y), \forall x \in V,\ y \in W.$$

(i)⇒(ii)

Sei (s, t) so daß $\beta(sx, ty) = \beta(x, y), \forall x \in V,\ y \in W$. Dann gilt naturlich auch

$$\beta(sx, ty) = \beta(\hat{}tsx, y) = \beta(x, y)$$

so $\beta(\hat{}tsx - x, y) = 0$ für jede $x \in V$ und $y \in W$ aber β ist nicht ausgeartet, also müss $\hat{}tsx = x\ \forall x \in V$ oder $\hat{}ts = id_V$.

(ii)⇒(iii) Sei $\hat{}ts = id_V$ dann ist natürlich $\hat{}t = s^{-1}$ und $t = \hat{}\hat{}t = \hat{}s^{-1}$ so $t^{-1} = (\hat{}s^{-1})^{-1} = s\hat{}$.

(iii)⇒(i) Sei $\hat{}t = s^{-1}$ und $s\hat{} = t^{-1}$. Dann gilt $\beta(sx, ty) = \beta(\hat{}tsx, y) = \beta(id_V x, y) = \beta(x, y)$, $\forall x \in V, y \in W$.

(i)⇔(iv). Sei B, S, T als in die aufgabe mit die festen Basen $v_1, \ldots, v_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_n$ zu V bzw. W. In matrixdarstellung haben wir

$$\beta(x, y) = x^t By$$

und

$$\beta(sx, ty) = (Sx)^t B (Ty) = x^t S^t BTy.$$

Es ist dann klar, daß (s, t) lasse β invariant genau wenn $S^t BT = B$.

(T 41)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, W, V $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ein Bilinearform. Sind X bzw. Y Teilmenge von V bzw. W, so definieren wir

$$X^\perp = \{y \in W \mid \beta(x, y) = 0,\ \forall x \in X\}, {}^\perp Y \qquad = \{x \in V \mid \beta(x, y) = 0,\ \forall y \in Y\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $X^\perp = (\beta_1 X)^o$ und ${}^\perp Y = (\beta_2 Y)^o$.

(b) Seien V, W endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ ein Bilinearform. Zeigen Sie, daß ${}^\perp W = \operatorname{Kern}(\beta_1)$ und $V^\perp = \operatorname{Kern}(\beta_2)$.

(c) Seien V, W endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ ein Bilinearform. Zeigen Sie, daß für jede Teilraum $X \subseteq V$ gilt

$$\dim X + \dim X^\perp = \dim W + \dim({}^\perp W \cap X)$$

(d) Zeigen Sie, daß wenn β nicht-ausgeartet ist, und $\dim V = \dim W$ dann gilt, für ein beliebiges Teilraum $X \subseteq V$

$$\dim X + \dim X^\perp = \dim V$$

(e) Es seien jetzt $V = \mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, t)$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die durch

$$\beta((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2$$

definierte Bilinearform.

(i) Geben Sie die Strukturmatrix für β an.

(ii) Ist β ausgeartet oder nicht?

(iii) Finden Sie ein Teilraum $X \subset V$ so daß $X \oplus X^{\perp} \neq V$.

(iv) Finden Sie ein Orthogonal-Basis für $V = \mathbb{C}^4$ bezüglich β, daß kein O-Basis bezüglich der Standardskalprodukte ist. D.h. geben Sie Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ an so daß $\beta(v_i, v_j) = 0$ genau wenn $i \neq j$.

LÖSUNG:

(a) Sei $X \subseteq V$ und $Y \subseteq W$ Teilmengen und setze

$$X^{\perp} = \{y \in W \,|\, \beta(x, y) = 0, \, \forall x \in X\}, \, {}^{\perp}Y = \{x \in V \,|\, \beta(x, y) = 0, \, \forall y \in Y\}.$$

Sei $y \in (\beta_1 X)^o$. Dann gilt $\beta(x, y) = (\beta_1 x)(y) = 0 \; \forall x \in X \Rightarrow y \in X^{\perp}$.

Sei $y \in X^{\perp}$ dann gilt $(\beta_1 x)(y) = \beta(x, y) = 0$ für jede $x \in X \Rightarrow y \in (\beta_1 X)^o$.

Gleichweise für β_2 und Y.

(b) Aus definition ist $V^{\perp} = \mathrm{Kern}\beta_2$ und ${}^{\perp}W = \mathrm{Kern}\beta_1$.

(c) Betrachten die einschränkung

$$\beta_{1|X} : X \to W^*$$

bei der Dimensionsformel haben wir

$$\dim \mathrm{Bild}\left(\beta_{1|X}\right) + \dim \mathrm{Kern}\left(\beta_{1|X}\right) = \dim X.$$

Hier ist $\mathrm{Bild}\left(\beta_{1|X}\right) = \beta_1 X$ und $\mathrm{Kern}\left(\beta_{1|X}\right) =^{\perp} W \cap X$. Ferner ist

$$\dim X^{\perp} = \dim (\beta_1 X)^o = \dim W - \dim(\beta_1 X)$$

also ist

$$\begin{aligned} \dim X^{\perp} + \dim X &= \dim W - \dim(\beta_1 X) + \dim(\beta_1 X) + \dim\left({}^{\perp}W \cap X\right) \\ &= \dim W + \dim\left({}^{\perp}W \cap X\right). \end{aligned}$$

(d) Wenn β nicht ausgeartet ist, dann folgt $V^{\perp} =^{\perp} W = 0$. Also gilt

$$\dim X + \dim X^{\perp} = \dim V.$$

(e) Die Strukturmatrix ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

und weil B invertierbar ist, so ist β nicht ausgeartet.

(iii) Sei $X = \{(0, 0, t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Denn ist

$$\begin{aligned} X^{\perp} &= \left\{\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^4 \,|\, \beta(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0, \, \forall \vec{x}_2 \in X\right\} \\ &= \{(x_1, y_1, z_1, t_1) \,|\, t(z_1 - t_1) = 0, \, \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\} = X. \end{aligned}$$

Also ist sicher $X^{\perp} \oplus X = X \oplus X = X \neq V$.

(iv) Es ist klar daß die standard-Basis $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ und $e_4 = (0,0,0,1)$ ein O-Basis bezüglich β ist aber wir wollen eine andere Basis finden. Sei $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = (0,0,2,1)$ und $v_4 = (0,0,1,2)$. Dann gilt

$$\beta(v_i, v_j) \quad = \beta(v_j, v_i) = \quad \delta_{ij},\ i \in \{1,2\}\ , j = 1,2,3,4,$$

Ferner gilt

$$\beta(v_3, v_4) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0 = \beta(v_4, v_3)$$

und $\beta(v_3, v_3) = 2^2 - 1 = 3$, $\beta(v_4, v_4) = 1^2 - 2^2 = -3$.