Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 26. Mai 2008

Lineare Algebra II

8. Tutorium

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(T 34)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $b : V \times V \to \mathbb{K}$ eine (nicht-ausgeartete) Bilinearform. Für $v,w \in V$ wird ein Endomorphismus $f_{v,w} : V \to V$ definiert durch

$$f_{v,w}(x) := b(v,x)w, \quad x \in V.$$

(a) Welchen Rang hat $f_{v,w}$?

(b) Zeigen Sie, dass Spur $f_{v,w} = b(v,w)$.

(c) Beweisen Sie: Sind $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots w_n\}$ zwei Basen von V, so ist

$$f := \sum_{i=1}^{n} f_{v_i,w_i}$$

ein Automorphismus von V.

(T 35)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und M, M_1 und M_2 Teilmengen von V. Weiter sei V^t der Dualraum von V und F, F_1 und F_2 Teilmengen von V^t. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^\circ \subseteq M_1^\circ$ und $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2^\circ \subseteq F_1^\circ$

(b) $M^\circ = \big(\mathrm{lin} M\big)^\circ$, $F^\circ = \big(\mathrm{lin} F\big)^\circ$

(c) Es gilt $M \subseteq M^{\circ\circ}$ und $F \subseteq F^{\circ\circ}$

(d) Man hat $M^\circ = M^{\circ\circ\circ}$ sowie $F^\circ = F^{\circ\circ\circ}$.
In (e) und (f) seien M_1, M_2 bzw. F_1, F_2 nun Teilräume von V bzw. V^t.

(e) Es gilt $(M_1 + M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ$ und $(F_1 + F_2)^\circ = F_1^\circ \cap F_2^\circ$

(f) $M_1^\circ + M_2^\circ \subseteq (M_1 \cap M_2)^\circ$ und $F_1^\circ + F_2^\circ \subseteq (F_1 \cap F_2)$.

(T 36)

Es gelten die Bezeichnungen wie in in Aufgabe (T 35e,f).
Zeigen Sie: Unter der zusätzlichen Voraussetzungen, dass V endlichdimensional ist, gilt für Teilräume M_1, M_2 von V

(a) $M_1 \subseteq M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M_2^\circ \subseteq M_1^\circ$,

(b) $M_1^\circ + M_2^\circ = (M_1 \cap M_2)^\circ$.

In diesem Fall hat man also in (T 35a) eine Äquivalenz und in (T 35f) das Gleichheitszeichen.

(T 37) Cramersche Regel für lineare Gleichungssyteme

Zu einem linearen Gleichungssystem der Form

$$Ax = b, \qquad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), x \in \mathbb{K}^n, b \in \mathbb{K}^n$$

kann man den Lösungsvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ folgendermaßen bestimmen: Bezeichne mit $a_1, \ldots, a_n$ die Spaltenvektoren von A. Dann gilt

$$x_i = \frac{\det\big(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots a_n\big)}{\det(A)},$$

wobei $(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots a_n)$ die Matrix bezeichnet, die durch ersetzen der $i$ten Spalte von A durch den Vektor b entsteht.

(a) Leiten Sie diese Formel aus elementaren Rechenregeln für Determinanten ab.

(b) Leiten Sie diese Formel aus der bekannten Cramerschen Regel für die Inversion von Matrizen ab.

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der Lösungsvektor x stetig und sogar differenzierbar von den Einträgen von A abhängt.