Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 29.05.2008

Lineare Algebra II

8. Tutorium mit Lösungshinweisen

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(T 34)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $b : V \times V \to \mathbb{K}$ eine (nicht-ausgeartete) Bilinearform. Für $v,w \in V$ wird ein Endomorphismus $f_{v,w} : V \to V$ definiert durch

$$f_{v,w}(x) := b(v,x)w, \quad x \in V.$$

(a) Welchen Rang hat $f_{v,w}$?

(b) Zeigen Sie, dass Spur $f_{v,w} = b(v,w)$.

(c) Beweisen Sie: Sind $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{B} = \{w_1, \dots w_n\}$ zwei Basen von V, so ist

$$f := \sum_{i=1}^{n} f_{v_i,w_i}$$

ein Automorphismus von V.

Lösung:

(a) Für jedes $x \in V$ ist $f_{v,w}(x) \in \mathbb{K}w$. Das Bild von $f_{w,w}$ ist also eindimensional und der Rang ist 1.

(b) Ist $\mathcal{B} = e_1, \dots e_n$ eine Basis von V und $w = \sum_i w_i e_i$, so gilt

$$M_{\mathcal{B}}(f_{v,w}) = \begin{pmatrix} & \cdot\cdot & \\ b(v,e_1)\,w & & b(v,e_n)\,w \\ & \cdot\cdot & \end{pmatrix},$$

und somit (aufgrund der Linearität von b im zweiten Argument)

$$\text{Spur } f_{v,w} = \sum_{i=1}^{n} b(v,e_i)w_i = \sum_{i=1}^{n} b(v,e_i w_i) = b(v, \sum_{i=1}^{n} w_i e_i) = b(v,w).$$

(c) Es ist klar, dass f ein Endomorphismus ist. Wir zeigen: $f(\mathcal{A}) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ ist eine Basis von V. Da $\sharp f(\mathcal{A}) \leq n$, genügt es, die lineare Unabhägigkeit nachzuweisen:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} c_k f(v_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{i=1}^{n} b(v_i, v_k) w_i = \sum_{i=1}^{n} b(v_i, \sum_{k=1}^{n} c_k v_k) w_i.$$

Da die Basisvektoren w_i aus $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind, folgt $b(v_i, \sum_{k=1}^{n} c_k v_k) = 0$ für alle i. Da b nicht-ausgeartet ist (und $\mathcal{A}$ eine Basis), muss $\sum_{k=1}^{n} c_k v_k = 0$ gelten. Dies bedeutet $c_k = 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Also ist $f(\mathcal{A})$ linear unabhägig und somit eine Basis von V.

(T 35)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und M, M_1 und M_2 Teilmengen von V. Weiter sei V^t der Dualraum von V und F, F_1 und F_2 Teilmengen von V^t. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^\circ \subseteq M_1^\circ$ und $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2^\circ \subseteq F_1^\circ$

(b) $M^\circ = \big(\mathrm{lin} M\big)^\circ$, $F^\circ = \big(\mathrm{lin} F\big)^\circ$

(c) Es gilt $M \subseteq M^{\circ\circ}$ und $F \subseteq F^{\circ\circ}$

(d) Man hat $M^\circ = M^{\circ\circ\circ}$ sowie $F^\circ = F^{\circ\circ\circ}$.
In (e) und (f) seien M_1, M_2 bzw. F_1, F_2 nun Teilräume von V bzw. V^t.

(e) Es gilt $(M_1 + M_2)^\circ = M_1^\circ \cap M_2^\circ$ und $(F_1 + F_2)^\circ = F_1^\circ \cap F_2^\circ$

(f) $M_1^\circ + M_2^\circ \subseteq (M_1 \cap M_2)^\circ$ und $F_1^\circ + F_2^\circ \subseteq (F_1 \cap F_2)$.

LÖSUNG:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} M_2^\circ &= \{f \in V^t \mid \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)\} \\ &= \{f \in V^t \mid (\langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in M_1) \wedge (\langle f, x\rangle,\ \forall x \in (M_2 \setminus M_1))\} \\ &= \{f \in V^t \mid \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in M_1\} \cap \{f \in V^t \mid \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in \big(M_2 \setminus M_1\big)\} \\ &= M_1^\circ \cap \big(M_2 \setminus M_1\big)^\circ \subseteq M_1^\circ. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$F_2^\circ = \{x \in V \mid (\langle f, x\rangle = 0, \forall f \in F_1) \wedge (\langle f, x\rangle, \forall f \in (F_2 \setminus F_1))\} = F_1^\circ \cap \big(F_2 \setminus F_1\big)^\circ.$$

(b) Aus $\langle f, x\rangle = 0$ folgt wegen der Bilinearität $\langle f, \lambda x\rangle = 0$, sowie $\langle \mu f, x\rangle = 0$ für alle λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Also hat man

$$f \in M^\circ \Rightarrow \mathbb{K} f \in M^\circ \quad \text{und} \quad x \in F^\circ \Rightarrow \mathbb{K} x \in M^\circ.$$

Genauso ist $\langle f_1, x\rangle + \langle f_2, x\rangle = \langle f_1 + f_2, x\rangle$ und $\langle f, x_1\rangle + \langle f, x_2\rangle = \langle f, x_1 + x_2\rangle$, und deshalb

$$f_1, f_2 \in M^\circ \Rightarrow f_1 + f_2 \in M^\circ \quad \text{und} \quad x_1, x_2 \in F^\circ \Rightarrow x_1 + x_2 \in M^\circ.$$

Zusammen ergibt dies die Behauptung.

(c) Per Definition gilt $\langle f, x\rangle = 0$ für alle $f \in M^\circ$ und alle $x \in M$. Hieraus folgt

$$M \subseteq \{x \in V \mid \langle f, x\rangle = 0,\ \forall f \in M^\circ\} = M^{\circ\circ}.$$

Ebenso hat man $F \subseteq \{f \in V^t \mid \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in F^\circ\} = F^{\circ\circ}$.

(d) $M^\circ \subseteq M^{\circ\circ\circ}$: Dies folgt sofort durch Anwenden von (c) auf M°. ($F = M^\circ$).
$M^{\circ\circ\circ} \subseteq M^\circ$: Nach (c) gilt $M^\circ \subseteq M^{\circ\circ}$. Wendet man hierauf (a) an (mit $F_1 = M^\circ$ und $F_2 = M^{\circ\circ}$), erhält man $M^{\circ\circ\circ} \subseteq M^\circ$.

(e) Jedes $x \in M_1 + M_2$ lässt sich als Summe $x = x_1 + x_2$ mir $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2$ darstellen. Dann gilt $\langle f, x\rangle = \langle f, x_1 + x_2\rangle = \langle f, x_1\rangle + \langle f, x_2\rangle$. Damit $f \in V^t$ orthogonal zu *jedem* solchen x ist, muss $\langle f, x_1\rangle = 0$ *und* $\langle f, x_2\rangle = 0$ gelten für jedes $x_1 \in M_1$ und jedes $x_2 \in M_2$. Also gilt

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2)^\circ &= \{f \in V^t \mid (\langle f, x_1\rangle = 0, \forall x_1 \in M_1) \wedge (\langle f, x_2\rangle = 0, \forall x_2 \in M_2)\} \\ &= \{f \in V^t \mid \langle f, x_1\rangle = 0, \forall x_1 \in M_1\} \cap \{f \in V^t \mid \langle f, x_2\rangle = 0, \forall x_2 \in M_2\} \\ &= M_1^\circ \cap M_2^\circ. \end{aligned}$$

Völlig analog erhält man auch $(F_1 + F_2)^\circ = (F_1 \cap F_2)^\circ$.

(f) Ist $f \in M_1^\circ + M_2^\circ$ so gilt $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in M_1^\circ$ und $f_2 \in M_2^\circ$. Für jedes $x \in M_1 \cap M_2$ ist damit $\langle f_1, x\rangle = 0$, da $x \in M_1$, und $\langle f_2, x\rangle = 0$, da $x \in M_2$. Also gilt

$$f \in M_1^\circ + M_2^\circ \Longrightarrow (\langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in M_1 \cap M_2) \Longrightarrow f \in \big(M_1 \cap M_2\big)^\circ.$$

Der Beweis der Aussage für F_1 und F_2 geht genauso.

(T 36)

Es gelten die Bezeichnungen wie in in Aufgabe (T 35e,f).
Zeigen Sie: Unter der zusätzlichen Voraussetzungen, dass V endlichdimensional ist, gilt für Teilräume M_1, M_2 von V

(a) $M_1 \subseteq M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M_2^\circ \subseteq M_1^\circ$,

(b) $M_1^\circ + M_2^\circ = (M_1 \cap M_2)^\circ$.

In diesem Fall hat man also in (T 35a) eine Äquivalenz und in (T 35f) das Gleichheitszeichen.

LÖSUNG:

(a) In (T 35a) wurde bereits die Implikation $\Rightarrow$ gezeigt. Weiter gilt nach (T 35a) auch:

$$M_2^\circ \subseteq M_1^\circ \ \Rightarrow\ M_1^{\circ\circ} \subseteq M_2^{\circ\circ}.$$

Da V endlichdimensional ist, gilt aber $M_i^{\circ\circ} = M_i$, für $i = 1, 2$. Damit ist die umgekehrte Implikation $\Leftarrow$ ebenfalls gezeigt.

(b) Wir brauchen nur nachzuweisen, dass $(M_1 \cap M_2)^\circ \subseteq M_1^\circ \cap M_2^\circ$ ist, die umgekehrte Inklusion wurde schon in (T 35e) gezeigt.

Wir wenden Teil (a) auf $(M_1 \cap M_2)^\circ$ und $M_1^\circ + M_2^\circ$ an:

$$(M_1 \cap M_2)^\circ \subseteq M_1^\circ + M_2^\circ \Leftrightarrow (M_1^\circ + M_2^\circ)^\circ \subseteq (M_1 \cap M_2)^{\circ\circ}. \tag{1}$$

Nach (T 35e) ist $(M_1^\circ + M_2^\circ)^\circ = M_1^{\circ\circ} \cap M_2^{\circ\circ}$. Da V endlichdimensional ist, gilt aber für jeden Teilraum $C \subseteq V$, dass $C^{\circ\circ} = C$. Also hat man

$$\underbrace{(M_1^\circ + M_2^\circ)^\circ}_{\substack{= M_1^{\circ\circ} \cap M_2^{\circ\circ} \\ = M_1 \cap M_2}} \subseteq \underbrace{(M_1 \cap M_2)^{\circ\circ}}_{= M_1 \cap M_2}.$$

Die Inklusion gilt also (beide Seiten sind sogar gleich). Damit folgt die Behauptung (wegen der Äquivalenz (1)).

(T 37) Cramersche Regel für lineare Gleichungssyteme

Zu einem linearen Gleichungssystem der Form

$$Ax = b, \qquad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), x \in \mathbb{K}^n, b \in \mathbb{K}^n$$

kann man den Lösungsvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ folgendermaßen bestimmen: Bezeichne mit $a_1, \ldots, a_n$ die Spaltenvektoren von A. Dann gilt

$$x_i = \frac{\det\big(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots a_n\big)}{\det(A)},$$

wobei $(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots a_n)$ die Matrix bezeichnet, die durch ersetzen der $i$ten Spalte von A durch den Vektor b entsteht.

(a) Leiten Sie diese Formel aus elementaren Rechenregeln für Determinanten ab.

(b) Leiten Sie diese Formel aus der bekannten Cramerschen Regel für die Inversion von Matrizen ab.

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der Lösungsvektor x stetig und sogar differenzierbar von den Einträgen von A abhängt.

LÖSUNG:

(a) **Beweis durch Determinantenumformungen:** Nach Voraussetzung gilt

$$Ax = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b,$$

wobei $x_i \in \mathbb{K}$ die Komponenten von x sind. Man rechnet nun

$$\begin{aligned} x_i \det(A) &= x_i \det\big(a_1, \ldots, a_n\big) = \\ &= \det\big(a_1, \ldots, x_i a_i, \ldots, a_n\big) = \det\left(a_1, \ldots, b - \sum_{j \neq i} a_j, \ldots, a_n\right) = \\ &= \det\big(a_1, \ldots, b, a_n\big). \end{aligned}$$

(Hierbei wurden jeweils von der ersten zur zweiten und von der zweiten zur dritten Zeile die Regeln für das Verhalten von Determinanten unter elementaren Matrizenumformungen angewendet.)

(b) **Beweis mit der Cramerschen Regel:** Es gilt $Ax = b$. Nach Voraussetzung ist A invertierbar, somit hat man also

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} A' = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & \ldots & (-1)^{1+n}\det(A_{n1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \det(A_{1n}) & \ldots & (-1)^{1+n}\det(A_{nn}) \end{pmatrix},$$

wobei A' die komplementäre Matrix aus der Cramerschen Regel zur Matrizeninversion ist und A_{ij} die Matrix bezeichnet, die man aus A durch steichen der $i$ten Spalte der $j$ten Zeile erhält. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \det(A) x_i &= \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) b_j \\ &= \det\big(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots a_n\big), \end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichung durch Entwickeln nach der j-ten Spalte erhält.

(c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Bezeichne mit a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, die Einträge von A. Wir betrachten den Eintrag $a_{kl} = t$ als Variable (die anderen Einträge von A sowie der Vektor b bleiben fest). Nach der Leibnitz Formel gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Als Funktion von $a_{kl} = t$ ist die Determinante also gegeben durch

$$\begin{aligned} \det A(t) &= t \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(k) = l} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k-1\,\sigma(k-1)} a_{k+1\,\sigma(k+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{=: A_1} + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n, \sigma(k) \neq l} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{=: A_2} \\ &= A_1 t + A_2. \end{aligned}$$

Ist $A_1 = 0$, so ist sie konstant. Sonst hängt sie linear (und somit stetig und differenzierbar) von t ab. Es gilt

$$\det(A)(t) = \begin{cases} = 0 & A_1 = A_2 = 0 \\ \neq 0 & A_1 = 0, A_2 \neq 0 \\ = 0 & t = -A_2/A_1 \\ \neq 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $\det(A)(t) \neq 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung $x(t)$ des Gleichungssystems $A(t)x = b$. Wir können Sie nach der Cramerschen Regel berechnen. Es gilt

$$\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \begin{cases} =: B & \text{konstant, falls } k = i \\ =: B_1 t + B_2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit Konstanten B_1, B_2, die sich wie oben aus der Leibnitzschen Formel ergeben. Also sind die Einträge von $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ gegeben durch

$$x_i(t) = \begin{cases} = \frac{B}{A_1 t + A_2} & k = i \\ = \frac{B_1 t + B_2}{A_1 t + A_2} & k \neq i \end{cases}.$$

Diese hängen als rationale Funktionen stetig und differenzierbar von t ab. (Die Lösung ist definiert für $\det(A)(t) = A_1 t + A_2 = 0$.) Also ist die Lösung insgesamt eine stetige und differenzierbare Funktion des Eintrags a_{kl} von A.