Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II
7. Tutorium

(T 31) Bilinearformen

Es sei $f : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

(a) Kann die Bilinearform f durch eine Matrix A beschrieben werden? Wenn ja, wie ergeben sich die Einträge dieser Matrix? Ist diese Beschreibung eindeutig? Bestimme die Darstellungsmatrix des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasis.

(b) Welcher Art ist die Darstellungsmatrix A wenn f nicht entartet, symmetrisch oder positiv definit ist?

(c) Sind $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2-x$, und $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto 2x_1y_1+2x_2y_2-x_1y_2-y_1x_2$ Bilinearformen? Wenn ja, durch welche Matrizen werden sie bezüglich der Standardbasis beschrieben? sind diese Matrizen invertierbar, symmetrisch oder positiv definit?

(T 32) Semidefininte Bilinearformen

Beweisen Sie, daß semidefinite nicht defnite symmetrische Bilinearformen ausgeartet sind.

Definition: Eine stetige Abbildung $q : V \to \mathbb{K}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt *quadratische Form*, falls die Gleichung $q(v+w)+q(v-w) = 2[q(v)+q(w)]$ für alle $v, w \in V$ erfüllt ist. Eine Teilmenge $Q \subset V$ heißt *Quadrik*, falls sie die Lösungsmenge einer Gleichung

$$q(v) + f(v) + c = 0$$

mit einer quadratischen Form q einer Linearform f und einem Skalar $c \in \mathbb{K}$ ist.

(T 33)

Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2-y^2$. Ist h eine Quadrik eine Bilinearform oder eine quadratische Form? Skizzieren Sie die Kennlinie $Q = \{(x,y) \mid h(x,y) = 1\}$. Ist Q eine Quadrik?

(T 34) Quadriken

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.