Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II

7. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 31) Bilinearformen

Es sei $f : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

(a) Kann die Bilinearform b durch eine Matrix A beschrieben werden? Wenn ja, wie ergeben sich die Einträge dieser Matrix? Ist diese Beschreibung eindeutig? Bestimme die Darstellungsmatrix des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardbasis.

(b) Welcher Art ist die Darstellungsmatrix B wenn b nicht entartet, symmetrisch oder positiv definit ist?

(c) Sind $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$, und $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \mapsto 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - y_2x_1x$ Bilinearformen? Wenn ja, durch welche Matrizen werden sie bezüglich der Standardbasis beschrieben? sind diese Matrizen invertierbar, symmetrisch oder positiv definit?

Lösung:

(a) Ja, nach Wahl einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Die Einträge A_{ij} sind die Bilder der Basisvektoren: $A_{ij} = f(v_i, v_j)$. Es seien $x, y \in V$ beliebig mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Das heißt

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \quad \text{und} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Bilinearität

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i b_i, y_j b_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(b_i, b_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} = x^T A y.$$

(Die Summe $\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}$ ist gerade die i-te Komponente des Spaltenvektors Ay.)

Die Darstellungsmatrix B hängt von der Wahl der Basis ab, und ist daher nicht eindeutig.

Für das Standardskalarprodukt gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

Folglich ist die Einheitsmatrix I die Darstellungsmatrix des Standardskalarproduktes bezüglich der Standardbasis.

(b) In diesen Fällen ist die Matrix A invertierbar, symmetrisch bzw. positiv definit: Ist f nicht ausgeartet, so gibt es keinen Vektor $v \in V$, so daß $f(-, v)$ die Nullabbildung ist. Somit gibt es keinen Vektor v mit $Av = 0$, d.h. die Matrix A ist invertierbar.

Ist f symmetrisch, so gilt $f(v_i, v_j) = b(v_j, v_i)$ und die Darstellungsmatrix A ist symmetrisch.

(c) Die Abbildung f ist nicht linear in x, folglich ist sie keine Bilinearform. Die Abbildung g ist eine symmetrische Bilinearform. Die beschreibende Matrix ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Hautminoren sind 2 und 5, somit ist die Matrix A und damit auch die Form g positiv definit.

(T 32) Semidefininte Bilinearformen

Beweisen Sie, daß semidefinite nicht defnite symmetrische Bilinearformen ausgeartet sind.

LÖSUNG:

Ist f eine semidefinite nicht positiv definite symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum V, so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $f(v, v) = 0$, welcher nicht der Nullvektor ist. Aus der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung

$$f(v, w)^2 \leq f(v, v) f(w, w)$$

folgt $f(w, v) = 0$ für alle $w \in V$. Somit ist f ausgeartet.

Definition: Eine stetige Abbildung $q : V \to \mathbb{K}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt *quadratische Form*, falls die Gleichung $q(v + w) + q(v - w) = 2[q(v) + q(w)]$ für alle $v, w \in V$ erfüllt ist. Eine Teilmenge $Q \subset V$ heißt *Quadrik*, falls sie die Lösungsmenge einer Gleichung

$$q(v) + f(v) + c = 0$$

mit einer quadratischen Form q einer Linearform f und einem Skalar $c \in \mathbb{K}$ ist.

(T 33)

Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x^2 - y^2$. Ist h eine Quadrik eine Bilinearform oder eine quadratische Form? Skizzieren Sie die Kennlinie $Q = \{(x, y) \mid h(x, y) = 1\}$. Ist Q eine Quadrik?

LÖSUNG:

Die Abbildung h ist eine quadratische Form. Die Kennlinie Q besteht aus den zwei Hyperbeln $x = \pm\sqrt{1 + y^2}$. Sie ist die Nullstellenmenge der Gleichung $h(x, y) - 1 = 0$ und somit eine Quadrik.

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe T35

(T 34) Quadriken

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Matrix A besitzt den Eigenwert 1 mit Eigenvektor $(1,1)^T$ und den Eigenwert 3 mit Eigenvektor $(-1,1)^T$. Seien $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ und $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$ die normierten Eigenvektoren. Dann ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix für den Wechsel zur Orthonormalbasis e_1, e_2. Sei $d = C^T b = (0,-4)$. In der neuen Basis (mit neuer Variablen y) lautet die Gleichung dann

$$(Cy)^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

bzw.

$$y^T C^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

oder ausgeschrieben

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_2 + \frac{1}{3} = 0.$$

Um das Lineargleid $-4y_2$ zu beseitigen, führt man eine quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2\right) + \frac{1}{3} &= y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3} \\ &= y_1^2 + 3\left(y_2 - \frac{2}{3}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Setzt man nun $z_1 := y_1$ und $z_2 := y_2 - \frac{2}{3}$, dann lautet die Gleichung in den neuen Variablen

$$z_1^2 + 3z_2^2 = 1.$$

Folglich ist die Lösungsmenge eine *Ellipse*. Bezüglich der z-Koordinaten liegt das Zentrum im Nullpunkt. Daher liegt es bezüglich der y-Koordinaten im Punkt $(0, \frac{2}{3})$ und der x-Koordinaten im Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Die Vektoren e_1 und e_2 geben die Richtung der Achsen der Ellipse an. Die Halbachsen haben die Länge 1 und $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Skizze siehe Abbildung .