Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
May 15, 2008

Lineare Algebra II

6. Tutorium

(T 26)

Seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß wenn $A \neq 0$ nilpotent ist dann ist A nicht diagonalisierbar.

(T 27)

Sei $\mathcal{P}_4$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 4 über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Weitherhin sei $D : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ der lineare Differentialoperator definiert durch

$$Df(x) = xf''(x) - 2f'(x)$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform für D und geben Sie die zugehörige Jordanbasis an.

(T 28)

Seien V und A wie in Aufgabe T26. Man sagt, daß V zyklisch bezüglich A ist, wenn es $r \in \mathbb{N}$ und $v \in V$ gibt, so daß V von den Vektoren $v, Av, \ldots, A^{r-1}v$ erzeugt wird. Sei $W_\lambda \subseteq V$ der Unterraum, der von den Eigenvektoren von A bezügl. der Eigenwert λ erzeugt ist. Zeigen Sie, daß wenn V zyklisch bezügl. A ist, dann hat der Unterraum W_λ Dimension 1.

(T 29)

Seien V und A wie in Aufgabe T26 und sei V zyklisch bezügl. A. Sei $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ ein Polynom.

(a) Zeigen Sie, daß die Eigenwerte von $f(A)$ gegeben sind, durch $f(\alpha)$, wobei α ein Eigenwert von A ist.

(b) Nimm an, daß $a_0 \neq 0$ und $f(A) = 0$. Zeigen Sie, daß A invertierbar ist und
$$A^{-1} = -a_0^{-1}(a_1E + a_2A + \cdots a_nA^{n-1})$$

(T 30)

Eine Matrix A heißt *unipotent, wenn $A - E$ nilpotent ist. Sie heißt* quasi-unipotent, wenn eine Potenz unipotent ist.

(a) Zeigen Sie, daß alle Eigenwerte von quasi-unipotenten Matrizen Einheitswurzeln sind. Sind quasi-unipotente Matrizen invertierbar? Wann das stimmt, geben Sie die Inverse an. (Hinweise: T29).

(b) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, daß A quasi-unipotent ist. Berechnen Sie die Jordan-Normalform von A und geben Sie die Jordan-Basis an.