**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
May 29, 2008

# Lineare Algebra II

## 6. Tutorium mit Lösungshinweisen

**(T 26)**

Seien $V$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß wenn $A \neq 0$ nilpotent ist dann ist $A$ nicht diagonalisierbar.

LÖSUNG:

Sei $A$ diagonalisierbar. D.h. es gibt eine Basis so daß $A = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A$ sind (und mindestens ein $\lambda_i \neq 0$). In dieser Basis gilt dann auch $A^k = Diag(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ für $k \geq 1$. Aber wenn $\lambda_i \neq 0$ dann ist der $i$-te Eintrag von $A^k$ gleich $\lambda_i^k \neq 0$, also $A^k \neq 0$ für $k \geq 1$, damit ist $A$ nicht nilpotent.

**(T 27)**

Sei $\mathcal{P}_4$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq 4$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Weitherhin sei $D : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4$ der lineare Differentialoperator definiert durch

$$Df(x) = xf''(x) - 2f'(x)$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform für $D$ und geben Sie die zugehörige Jordanbasis an.

LÖSUNG:

Sei $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3, v_5 = x^4$ ein Basis von $\mathcal{P}_4$. Man verifiziert dann einfach daß: $Dv_1 = 0$, $Dv_2 = -2v_1$, $Dv_3 = -2v_2$, $Dv_4 = 0$ und $Dv_5 = 4v_4$. Also ist die Matrix von $D$ bezügl. dieser Basis:

$$A_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht daraus, daß die Eigenwerte und 0 ist mit algebraische Vielfachheit 5. Man sieht jetzt einfach daß, mit $e_1 = v_3 = x^3, e_2 = -2v_2 = -2x^2, e_3 = 4v_1 = 4$ gilt $De_1 = e_2$, $De_2 = e_3$ und $De_3 = 0$. Weiter mit $e_4 = v_5 = x^4, e_5 = 4v_4 = 4x^3$ gilt auch $De_4 = e_5$ und $De_5 = 0$. Also gibt $e_1, e_2, e_3$ und $e_4, e_5$ zwei Jordanketten und damit zwei Jordanblöckchen. In die basis $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ hat $A$ die Matrixdarstellung:

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**(T 28)**

Seien $V$ und $A$ wie in Aufgabe T26. Man sagt, daß $V$ zyklisch bezüglich $A$ ist, wenn es $r \in \mathbb{N}$ und $v \in V$ gibt, so daß $V$ von den Vektoren $v, Av, \dots, A^{r-1}v$ erzeugt wird. Sei $W_\lambda \subseteq V$ der Unterraum, der von den Eigenvektoren von $A$ bezügl. der Eigenwert $\lambda$ erzeugt ist. Zeigen Sie, daß wenn $V$ zyklisch bezügl. $A$ ist, dann hat der Unterraum $W_\lambda$ Dimension 1.

LÖSUNG:

Sei $v$ der zyklische Vektor, d.h. $V = \text{Span}(v, Av, \dots, A^{r-1})$, dann gilt auch $A^r v = \Sigma_{i=0}^{r-1} a_i A^i v$. Sei $Aw = \lambda w$, d.h. $w$ ist ein Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda$. Dann gilt $w = \Sigma_{i=0}^{r-1} b_n A^i v$ und

$$\begin{aligned}
Aw &= \Sigma_{i=0}^{r-1} b_i A^{i+1} v \\
&= \Sigma_{i=1}^{r} b_{i-1} A^i v \\
&= \Sigma_{i=1}^{r-1} b_{i-1} A^i v + b_{r-1} \Sigma_{i=0}^{r-1} a_i A^i v \\
&= b_{r-1} a_0 v + \Sigma_{i=1}^{r-1} (b_{i-1} + b_{r-1} a_i) A^i v \\
&= \lambda w
\end{aligned}$$

d.h. $b_{r-1} a_0 = \lambda b_0$ und wieder ist

$$b_{i-1} + b_{r-1} a_i = \lambda b_i \text{ für } i = 1, \dots, r-1.$$

D.h. $b_{r-2} = b_{r-1}(\lambda - a_{r-1})$, $b_{r-3} = \lambda b_{r-2} - b_{r-1} a_{r-2} = b_{r-1}(\lambda(\lambda - a_{r-1}) - a_{r-2})$ bzw. Jede $b_i$, $i = r-2, \dots, 0$ kann dann als ein Vielfaches von $b_{r-1}$ ausgedrückt werden, d.h. der Eigenraum hat Dimension eins.

**(T 29)**

Seien $V$ und $A$ wie in Aufgabe T26 und sei $V$ zyklisch bezügl. $A$. Sei $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ ein Polynom.

(a) Zeigen Sie, daß die Eigenwerte von $f(A)$ gegeben sind, durch $f(\alpha)$, wobei $\alpha$ ein Eigenwert von $A$ ist.

(b) Nimm an, daß $a_0 \neq 0$ und $f(A) = 0$. Zeigen Sie, daß $A$ invertierbar ist und

$$A^{-1} = -a_0^{-1}(a_1 E + a_2 A + \cdots a_n A^{n-1})$$

LÖSUNG:

a) Wenn $V$ zyklisch bezügl. $A$ ist, dann hat $A$ eine Jordan Normalform mit nur einem Jordan-Block, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

( $r \times r$ Matrix). Und genau wie in Aufgabe T25 gilt:

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & * & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda) & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & f(\lambda) & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

( $r \times r$ Matrix) wobei $*$ für irgendeine beliebige Zahlen steht. Man sieht dann einfach, daß das charakteristische Polynom für $f(A)$ $p_{f(A)}(t) = det(tE - f(A)) = (t - f(\lambda))^r$ ist, somit sind die Eigenwerte von $f(A)$ genau $f(\lambda)$.

b) Sei

$$B = -a_0^{-1}(a_1 E + a_2 A + \cdots a_n A^{n-1}).$$

Wenn $f(A) = \Sigma_{i=0}^n a_i A^i = 0$ dann ist natürlich

$$AB = -a_0^{-1}(a_1 A + a_2 A^2 + \cdots a_n A^n) = -a_0^{-1}(-a_0 E) = E.$$

und genauso ist $BA = E$ also ist $A$ invertierbar und $A^{-1} = B$.

**(T 30)**

Eine Matrix $A$ heißt *unipotent, wenn* $A - E$ *nilpotent ist. Sie heißt* quasi-unipotent, wenn eine Potenz unipotent ist.

(a) Zeigen Sie, daß alle Eigenwerte von quasi-unipotenten Matrizen Einheitswurzeln sind. Sind quasi-unipotente Matrizen invertierbar? Wann das stimmt, geben Sie die Inverse an. (Hinweise: T29).

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $A$ quasi-unipotent ist. Berechnen Sie die Jordan-Normalform von $A$ und geben Sie die Jordan-Basis an.

LÖSUNG:

a) Sei $(A^r - E)^n = 0$ mit $r, n \geq 1$. Sei $Av = \lambda v$, dann ist natürlich $A^r v - Ev = (\lambda^r - 1)v$ aber $(A^r v - Ev)^n = 0$ also ist $\lambda^r - 1 = 0$.

$$p(A) = (A^r - E)^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} A^{kr} = \Sigma_{i=0}^{nr} a_i A^i$$

Hier ist $a_0 = (-1)^n \neq 0$ also folgt aus T2, daß $A$ invertierbar ist, $a_{nk} = \binom{n}{k}(-1)^{n-k}$ und

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -a_0^{-1}(a_1 E + a_2 A + \cdots a_n A^{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1}(\Sigma_{k=1}^n a_{kr} A^{kr-1}) \end{aligned}$$

b) Es ist klar, daß

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2b + ac \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

und daß $(A^2 - E)^2 = 0$, also ist $A$ quasi-unipotent. Die Eigenwerte von $A$ sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ein Eigenvektor für $\lambda_1$ ist gegeben durch $v = (x, y, z)$ wobei $z = 0$ und $2x + ay = 0$, also wenn $a = 0$ dann ist $v_0 = (0, 1, 0)$ ein Eigenvektor. Und wenn $a \neq 0$, dann ist $v_0 = (-a/2, 1, 0)$ ein Basisvektor.

Wir haben

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & -2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Und der Kern von $A - E$ ist dann $v = (x, y, z)$ wo $x$ beliebig ist und $ay + bz = 0 = -2y + cz$, d.h. wenn $a \neq 0$ ist $y = -b/az$ und wenn $c \neq 0$ ist dann ist $y = c/2z$. In jeden Fall ist $v_1 = (1, 0, 0)$ eine Basisvektor für $Kern(A - E)$ und wir suchen noch einen (die Dimension ist 1). Wann diesen Vektor unabhängig von $v_0$ und $v_1$ ist, haben wir einen. Aber sonst gibt mehre unterschiedlicher Falle:

1. Wenn $a = 0, b \neq 0$ dann muss $z = 0$, somit ist $v_2 = (0, 1, 0)$ noch ein Basisvektor für $Kern(A - E)$ aber $v_2 = v_0$, also ist 1 die geometrische Vielfachheit von 1.
2. Wenn $a = 0, b = 0, c = 0$ dann muss $y = 0$ und $v_3 = (0, 0, 1)$ ist noch ein Basisvektor und die geom. Vfh. ist 2.
3. Wenn $a = 0, b = 0, c \neq 0$ dann ist $v_4 = (0, c/2, 1)$ noch ein Basisvektor unabhängig von $v_0, v_1$ also ist geom. Vfh 2.
4. Wenn $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ dann ist $y = 0$ und $z = 0$, also bekommen wir keinen weiteren Basisvektor und die geom. Vfh. ist 1.
5. Wenn $a \neq 0, b = 0, c = 0$ dann ist $y = 0$ und $z$ beliebig, also $v_3 = (0, 0, 1)$ ist noch ein Basisvektor und die geom. Vfh. ist 2.
6. Wenn $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ dann muss $y = 0$ und $z = 0$ also bekommen wir keinen weiteren Basisvektor somit ist die geom. Vfh. 1.
7. Wenn $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ und $-b/a \neq c/2$ dann gibt's kein weiteren Basisvektoren also die geom. Vfh. ist 1.
8. Wenn $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, -b/a = c/2$ dann ist $v_4$ noch eine Basis Vektor und die geom. Vfh. ist 2.

Also haben wir die folgenden zwei möglichen Formen von Jordanschen Normalformen von $A$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

wobei $A_1$ gilt, wenn 1 die geometrische Vielfachheit von eigenwert 1 ist, sonst gilt $A_2$.