Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 06.05.2008

Lineare Algebra II

5. Tutorium

(T 21) Irreduzible Polynome

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ der Vektoraum der Polynome mit Koeffizenten aus $\mathbb{K}$. Ein Polynom $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ heißt *irreduzibel*, wenn es keine Polynome q, $r \in \mathcal{P}(K)$ vom Grad größer 0 gibt, mit der Eigenschaft, dass $p = qr$.

(a) Wie sehen irreduzible Polynome in $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ aus? Wie in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein irreduzibles Polynom in $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, dessen Grad größer als 2 ist.

(T 22) Euklidscher Algorithmus

In der Vorlesung wurde ein Verfahren zur Ermittlung des ggT zweier Zahlen behandelt, der sogenannte *Euklidsche Algorithmus*, den man kurz folgendermaßen beschreiben kann.
Bestimmung von $\mathrm{ggT}(a, b)$**:**

- Schritt 0: Setze $a_1 = \min\{a, b\}$, $a_0 = \max\{a, b\}$.
- Schritt k, $k = 1, 2, \ldots$: Führe eine Division mit Rest aus,

$$a_{k-1} = q_k a_k + r_k.$$
$$a_{k+1} := r_k.$$

- Falls $a_{k+1} = 0$, so ist $a_k = \mathrm{ggT}(a, b)$ und man kann aufhören.

(a) Sei n die Zahl an Schritten, die der Algorithmus benötigt, um $\mathrm{ggT}(a_0, b_0)$ zu ermitteln. Betrachten Sie die Matrix $M \in M_2(\mathbb{Z})$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass M^{-1} ebenfalls nur ganzzahlige Einträge hat, und berechnen Sie

$$M^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Welche Bedeutung haben die Einträge von M^{-1}?

(b) Finden Sie eine Folge $f_0, f_1, \ldots$ von ganzen Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Berechnung von $\mathrm{ggT}(f_m, f_{m+1})$ genau m Schritte benötigt (ohne Schritt 0).
Hinweis: Fibonacci-Zahlen, vgl. letztes Semester, Aufgabe (A 37) in der 12. Übung.

(c) Zeigen Sie, dass es kein Paar (a, b) ganzer Zahlen gibt mit $a < f_{m+1}$ und $b < f_m$, für welches m Schritte oder mehr benötigt werden.

(T 23)

Sei $\mathcal{P}_m$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq m$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Weiterhin sei $D \in \operatorname{End} \mathcal{P}$ definiert durch die Ableitung, also

$$Df = f'.$$

Zeigen Sie, dass D nilpotent ist und bestimmen Sie eine zyklische Basis für D. Geben auch eine Basis an, in der D Jordan-Normalform hat.

(T 24)

Im Folgenden bezeichnet K einen Körper, $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) Betrachten Sie einen Jordanblock der Größe 2×2, zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, also eine Matrix

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Formel für $J^m(\lambda)$, $m \geq 0$.

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und finden Sie Transformationsmatrizen S und S^{-1}, so dass $S^{-1}AS$ Jordan Normalform hat.
(Hinweis: Benötigt wird hierzu eine zyklische Basis für jeden (verallgemeinerten) Eigenraum von A.)

(c) Berechnen Sie die Matrix A^{2008}.

(T 25) Polynome von Jordan-Blöcken

Sei $p(X)$ ein Polynom und J ein Jordan-Block der Größe $n \times n$,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$p(J) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & \frac{p'(\lambda)}{1!} & \frac{p''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{p^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & p(\lambda) & \frac{p'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{p^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix},$$

wobei wie üblich $p^{(k)}$ die k-te Ableitung von p bezeichnet.