Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 29.04.2008

Lineare Algebra II

4. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 16) Wiederholung

Es sei $p \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, daß zu jeder Nullstelle z von p auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist.

(b) Beweisen Sie, daß p in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerfällt.

Nun sei A eine reelle $n \times n$-Matrix.

c) Zeigen Sie, daß, falls jeder Eigenwert nur einfach vorkommt, $\mathbb{R}^n$ die direkte Summe $\oplus V_i$ endlich vieler höchstens 2-dimensionaler A-invarianter Untervektorräume V_i ist.

d) Welche Eigenwerte können auftreten, wenn A orthogonal ist? Wie sehen in diesem Fall die Einschränkungen auf die 1- und 2-dimensionalen invarianten Untervektorräume aus?

(T 17) 2×2-Matrizen

Bestimmen Sie für die folgenden beiden Matrizen ihre Jordanform sowie die Eigen- und Hauptvektoren und geben Sie die Transformationsmatrizen an:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(T 18) Jordannormalform in Beispielen

Geben Sie reelle Matrizen A_i in Jordannormalform mit den folgenden Eigenschaften an:

1. A_1 hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.
2. A_2 hat den Eigenwert -1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.
3. A_3 hat den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 und den Eigenwert -2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.
4. Die Matrizen A_4 und A_5 haben beide den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2, haben keine weiteren Eigenwerte und sind trotzdem nicht ähnlich.

(T 19) Jordannormalform

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze die Eigenwerte 1 und -1. Geben Sie die Jordannormalform von A an für die folgenden Fälle an:

(a) Die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte ist zwei.

(b) Die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 ist eins, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 ist drei und die geometrische zwei.

(c) Die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 ist eins, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 ist drei und die geometrische ist eins.

(T 20) Idempotente Involutionen

Definition: Eine Selbstabbildung $f : M \to M$ einer Menge heißt *idempotent*, falls $f = f \circ f$ gilt. Eine Selbstabbildung $f : M \to M$ einer Menge heißt *Involution*, falls sie invertierbar ist und $f^{-1} = f$ gilt.

Es sei $f : \mathbb{R}^{042008} \to \mathbb{R}^{042008}$ eine idempotente Involution. Welche Form kann die Jordan-Normalform annehmen?

Hinweis: Es gibt nicht viele Möglichkeiten