Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II

4. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 16) Wiederholung

Es sei $p \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, daß zu jeder Nullstelle z von p auch $\overline{z}$ eine Nullstelle ist.

(b) Beweisen Sie, daß p in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerfällt.

Nun sei A eine reelle $n \times n$-Matrix.

c) Zeigen Sie, daß, falls jeder Eigenwert nur einfach vorkommt, $\mathbb{R}^n$ die direkte Summe $\oplus V_i$ endlich vieler höchstens 2-dimensionaler A-invarianter Untervektorräume V_i ist.

d) Welche Eigenwerte können auftreten, wenn A orthogonal ist? Wie sehen in diesem Fall die Einschränkungen auf die 1- und 2-dimensionalen invarianten Untervektorräume aus?

LÖSUNG:

(a) Es sei $p(z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i$ mit reellen Koeffizienten a_i. Ist z eine Nullstelle von p so gilt

$$0 = \overline{0} = \overline{p(z)} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i z^i} = \sum_{i=1}^n \overline{a}_i \overline{z}^i = \sum_{i=1}^n a_i \overline{z}^i,$$

d.h. $\overline{z}$ ist eine Nullstelle von p.

(b) Da jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren Zerfällt, folgt

$$p(z) = (\lambda_1 - z)(\overline{\lambda}_1 - z) \cdots (\lambda_k - z)(\overline{\lambda}_k - z) \cdot (\lambda_{k+1} - z) \cdots (\lambda_m - z) \tag{1}$$

mit nicht-reellen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und reellen Nullstellen $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$. (Da nicht reelle Nullstellen in Paaren auftreten gilt hier $P_A = \mathrm{Grad} p = n = 2k + m$.)

(c) Nach b zerfällt das charakteristische Polynom $\det(z \cdot E - A)$ in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten

$$P_A(z) = (\lambda_1 - z)(\overline{\lambda}_1 - z) \cdots (\lambda_k - z)(\overline{\lambda}_k - z) \cdot (\lambda_{k+1} - z) \cdots (\lambda_m - z)$$

mit nicht-reellen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und reellen Nullstellen $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$. Die Faktoren sind nach Annahme teilerfremd und es gilt $P_a(A) = 0$. Somit ist $\mathbb{R}^n$ die direkte Summe der 2-dim. Untervektorräume $\ker(\lambda_1 - A)(\overline{\lambda}_1 - A), \ldots, \ker(\lambda_k - z)(\overline{\lambda}_k - A)$ und der 1-dim. Untervektorräume $\ker(\lambda_{k+1} - z), \cdots, \ker(\lambda_m - z)$.

(d) Falls A orthogonal ist, haben alle Eigenwerte Betrag 1. Es können daher nur Eigenwerte der Form $\lambda = e^{i\varphi}$ auftreten. Die Einschränkung auf einen eindimensionalen A-invarianten Untervektorraum kann nur die Identität oder die Spiegelung am Ursprung sein. Die Einschränkung auf einen 2-dimensionalen A-invarianten Untervektorraum wird durch eine orthogonale 2×2-Matrix beschrieben. Diese hat die Form

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

ist also eine Drehung.

(T 17) 2×2**-Matrizen**

Bestimmen Sie für die folgenden beiden Matrizen ihre Jordanform sowie die Eigen- und Hauptvektoren und geben Sie die Transformationsmatrizen an:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

- Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A:

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

Damit sind $\lambda_1 := 4$ und $\lambda_2 := 6$ die Eigenwerte von A.

Somit ist die Jordanform von A

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Weiterführende Rechnungen bestimmen zudem die Transformationsmatrix. Es gelten

$$\begin{pmatrix} 5-4 & -1 \\ -1 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 5-6 & -1 \\ -1 & 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

damit ist

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ein EV zu } \lambda_1 \text{ und } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ein EV zu } \lambda_2$$

Wir machen die Probe. Sei $T_A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Transformationsmatrix. Zunächst gilt

$$T_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} T_A^{-1} A T_A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das ist tatsächlich die Diagonalmatrix der Eigenwerte, was auch die Jordanmatrix von A ist.

- Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von B:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)+4 = \lambda^2-6\lambda+5+4 = \lambda^2-6\lambda+9 = (\lambda-3)^2$$

Damit ist $\lambda_1 := 3$ der einzige Eigenwert von B.
Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 4 \\ -1 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit hat λ_1 die geometrische Vielfachheit 1 mit dem Eigenvektor

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix läßt sich nicht diagonalisieren. Da wir aber nur eine 2×2-Matrix betrachten, wissen wir, daß $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ die zu B gehörige Jordanmatrix sein muß. Als nächstes muß noch ein Hauptvektor bestimmt werden. Der Ansatz ist:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS wird von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelöst, d.h.,

$$\vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist der gesuchte Hauptvektor.

Wir machen noch die Probe. Sei $T_B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Transformationsmatrix. Zunächst gilt

$$T_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} T_B^{-1}BT_B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das ist tatsächlich die Jordanmatrix von B.

(T 18) Jordannormalform in Beispielen

Geben Sie reelle Matrizen A_i in Jordannormalform mit den folgenden Eigenschaften an:

1. A_1 hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1.
2. A_2 hat den Eigenwert -1 mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.

3. A_3 hat den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 und den Eigenwert -2 mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.
4. Die Matrizen A_4 und A_5 haben beide den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2, haben keine weiteren Eigenwerte und sind trotzdem nicht ähnlich.

LÖSUNG:

Mögliche Lösungen sind:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(T 19) Jordannormalform

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze die Eigenwerte 1 und -1. Geben Sie die Jordannormalform von A an für die folgenden Fälle an:

(a) Die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte ist zwei.

(b) Die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 ist eins, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 ist drei und die geometrische zwei.

(c) Die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 ist eins, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert -1 ist drei und die geometrische ist eins.

LÖSUNG:

Aus den Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich die folgenden Informationen über die Jordanblöcke ablesen:

- Ist die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleich der Raumdimension, dann existiert eine Jordannormalform.
- Die algebraische Vielfachheit ist die Summe der Größen der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.
- Die geometrische Vielfachheit ist die Anzahl der Jordanblöcke zum entsprechenden Eigenwert.

Damit folgt:

(a) Eine Jordannormalform J von A besitzt zu jedem Eigenwert zwei Jordanblöcke der Größe eins, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und zwei Jordanblöcke zum Eigenwert -1 der Größe eins bzw. zwei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Eine Jordannormalform J von A besitzt einen Jordanblock zum Eigenwert 1 der Größe eins und einen Jordanblock zum Eigenwert -1 der Größe drei, zum Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(T 20) Idempotente Involutionen

Definition: Eine Selbstabbildung $f : M \to M$ einer Menge heißt *idempotent*, falls $f = f \circ f$ gilt. Eine Selbstabbildung $f : M \to M$ einer Menge heißt *Involution*, falls sie invertierbar ist und $f^{-1} = f$ gilt.

Es sei $f : \mathbb{R}^{042008} \to \mathbb{R}^{042008}$ eine idempotente Involution. Welche Form kann die Jordan-Normalform annehmen?

Hinweis: Es gibt nicht viele Möglichkeiten

LÖSUNG:

Es gilt $f = f \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{042008}}$. Somit gibt es genau eine mögliche Jordan-Normalform, nämlich die 042008×042008-Einheitsmatrix.