Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
April 18, 2008

Lineare Algebra II

3. Tutorium

(T 11) Positiv definiter Endomorphismus

Es seien V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum mit Dimension n und $A : V \to V$ ein symmetrischer Endomorphismus. Zeigen Sie, daß die folgenden zwei Bedingungen für A äquivalent sind:

(a) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(b) $\langle Av, v\rangle > 0$ für alle $v \in V$.

Ein Endomorphismus, der diese Bedingungen erfüllt, wird *positiv definit* genannt.

(T 12) Wurzel eines positiv definiten Endomorphismus

Es sei V wie in (T11) und A ein positiv definiter Endomorphismus. Zeigen Sie, daß es einen symmetrischen Endomorphismus $B : V \to V$ gibt, so daß $B^2 = A$ und $AB = BA$.

(T 13) Zerlegung einer invertierbaren linearen Abbildung

Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, daß A^tA positiv definit ist.

(b) Aus Aufgabe (T12) wissen wir, daß es einen symmetrischen positiv definiten Endomorphism B gibt, so daß $B^2 = A^tA$. Sei $U = AB^{-1}$. Zeigen sie, daß U unitär ist.

(c) Zeigen Sie, daß $A = UB$.

(T 14) Existenz einer nichttrivialen Polynomgleichung für eine Matrix

Zeige elementar (d.h. insbesondere ohne den Satz von Cayley-Hamilton), daß jede Matrix ein nichttriviales Polynom erfüllt, d.h. daß das Einsetzen der Matrix in dieses Polynom auf die Nullmatrix führt.
Hinweis: Betrachte dazu $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(T 15) Trigonalisierung von Endomorphismen

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Dimension n über $\mathbb{C}$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Eine A-invariante *Fahne* in V ist eine Reihe aus Unterräumen von V: $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ wobei $V_i \subseteq V_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1,\ dim(V_i) = i,\ A(V_i) \subseteq V_i,\ i = 1, \ldots, n$ und $V_n = V$. Eine *Fahnen Basis* von V ist eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ so, daß $V_i = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i)$.

(a) Zeigen Sie, daß A durch eine Dreiecksmatrix darstellbar ist, genau wenn es eine A-invariante Fahnen Basis gibt.

(b) Zeigen Sie, daß, wenn A durch eine Dreiecksmatrix darstellbar ist, das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. $p_A(t) = c(\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\cdots(\lambda_n - t)$, mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $c = \pm 1$.