Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
April 30, 2008

Lineare Algebra II

3. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 11) Positiv definiter Endomorphismus

Es seien V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum mit Dimension n und $A : V \to V$ ein symmetrischer Endomorphismus. Zeigen Sie, daß die folgenden zwei Bedingungen für A äquivalent sind:

(a) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(b) $\langle Av, v\rangle > 0$ für alle $v \in V$.

Ein Endomorphismus, der diese Bedingungen erfüllt, wird *positiv definit* genannt.

Lösung:

Lassen Sie $v_1, \ldots, v_n$ ein ON-Basis von Eigenvektoren zum A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(a)⇒(b): Lassen Sie $v \in V$ beliebig $\neq 0$, dann gilt $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $a_i \in \mathbb{R}$ (und an mindesten ein $a_j \neq 0$) und

$$\begin{aligned}
\langle Av, v\rangle &= \left\langle A \sum a_i v_i, \sum a_k v_k \right\rangle = \left\langle \sum a_i A v_i, \sum a_k v_k \right\rangle \\
&= \left\langle \sum \lambda_i a_i v_i, \sum a_k v_k \right\rangle = \sum_{i,k=1}^n \lambda_i a_i a_k \langle v_i, v_k\rangle \\
&= \sum_{i,k=1}^n \lambda_i a_i a_k \delta_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^2 > 0
\end{aligned}$$

weil alle $\lambda_k > 0$.

(b)⇒(a) Jetzt haben wir

$$\langle Av_i, v_i\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i\rangle = \lambda_i > 0$$

weil $\langle Av_i, v_i\rangle > 0$.

(T 12) Wurzel eines positiv definiten Endomorphismus

Es sei V wie in (T11) und A ein positiv definiter Endomorphismus. Zeigen Sie, daß es einen symmetrischen Endomorphismus $B : V \to V$ gibt, so daß $B^2 = A$ und $AB = BA$.

Lösung:

Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein ON-Basis von Eigenvektoren zu A mit zugehöriger Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Es ist bekannt, daß wir A darstellen können als

$$A = U^T D U$$

mit U unitär und $D = Diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen. Sei

$$B = U^T D' U$$

mit $D' = Diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$. Dann gilt natürlich $D'^2 = D$ und

$$B^2 = U^t D' U U^t D' U = U^t D'^2 U = U^t D U = A.$$

Wir haben auch

$$AB = U^t D U U^t D' U = U^t D D' U = U^t D' D U = U^t D' U U^t D U = BA$$

weil $D'D = DD'$.

(T 13) Zerlegung einer invertierbaren linearen Abbildung

Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, daß $A^t A$ positiv definit ist.

(b) Aus Aufgabe (T12) wissen wir, daß es einen symmetrischen positiv definiten Endomorphism B gibt, so daß $B^2 = A^t A$. Sei $U = AB^{-1}$. Zeigen sie, daß U unitär ist.

(c) Zeigen Sie, daß $A = UB$.

LÖSUNG:

(a) Offensichtlich ist $A^t A^t = A^t A^{t^t} = A^t A$ also $A^t A$ ist symmetrisch. Es gilt auch daß $spA^t Avv = \langle Av, Av \rangle = \|Av\| > 0$ für alle $v \in V \setminus 0$ weil A invertierbar ist.

(b) Wir haben, daß $U^{-1} = BA^{-1}$ und $U^t = B^{t^{-1}} A^t = B^{-1} A^t$ und $UU^t = AB^{-1}B^{-1}A^t = AB^{-2}A^t = AA^{-1} = \mathbb{1}$. Also ist $U^t = U^{-1}$ und U ist unitär.

(c) $A = UB$ folgt direkt aus Aufgabe (b).

(T 14) Existenz einer nichttrivialen Polynomgleichung für eine Matrix

Zeige elementar (d.h. insbesondere ohne den Satz von Cayley-Hamilton), daß jede Matrix ein nichttriviales Polynom erfüllt, d.h. daß das Einsetzen der Matrix in dieses Polynom auf die Nullmatrix führt.
Hinweis: Betrachte dazu $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum.

LÖSUNG:

Man betrachte $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ als n^2-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist die Menge

$$\{E, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$$

über $\mathbb{K}$ linear abhängig. Ist eine solche Relation $\sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0$, so ist A Nullstelle des nichttrivialen Polynoms $\sum_{i=0}^{n^2} a_i x^i$.

(T 15) Trigonalisierung von Endomorphismen

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Dimension n über $\mathbb{C}$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Eine A-invariante *Fahne* in V ist eine Reihe aus Unterräumen von V: $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ wobei $V_i \subseteq V_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1,\ dim(V_i) = i,\ A(V_i) \subseteq V_i,\ i = 1, \ldots, n$ und $V_n = V$. Eine *Fahnen Basis* von V ist eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ so, daß $V_i = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i)$.

(a) Zeigen Sie, daß A durch eine Dreiecksmatrix darstellbar ist, genau wenn es eine A-invariante Fahnen Basis gibt.

(b) Zeigen Sie, daß, wenn A durch eine Dreiecksmatrix darstellbar ist, das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. $p_A(t) = c(\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\cdots(\lambda_n - t)$, mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $c = \pm 1$.

LÖSUNG:

(a) $\Rightarrow$: Sei $A = (a_{ij})$ eine Dreiecksmatrix und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Basis von V, bezüglich welcher A Dreiecksmatrix ist. D.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann ist $Ae_1 = a_1 1 e_1 \Rightarrow v_1 = e_1$ und $V_1 = \mathrm{Span}(e_1)$. Weiter gilt: $Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \in \mathrm{Span}(e_1, e_2) \Rightarrow v_2 = e_2$ und $V_2 = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. Wir möchten damit zeigen, daß $v_j = e_j$ mit Hilfe von Induktion. Die Induktionsverankerung ist klar und der Induktionsschritt ist wie folgt: Sei $V_i = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i)$ mit $v_j = e_j$, $j = 1 \ldots, i$. Dann ist $Ae_{i+1} = a_{i+1i+1}e_{i+1} + a_{ii+1}e_i + \cdots a_{1i+1}e_1 \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i, e_{i+1})$. Damit ist der Beweis klar.

$\Leftarrow$: Sei $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine A-invariante Fahnen Basis für V. Dann gilt $Av_i \in \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_i)$ also ist $Av_i = a_{1i}v_1 + \cdots + a_{ii}v_i$, $i = 1, \ldots, n$. D.h. die Matrix für A bezüglich der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist genau die Matrix $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ mit $a_i j$ wie oben gegeben und man sieht, daß $a_{ij} = 0$ für $j < i$, also ist die Matrix eine Driecksmatrix.

(b) Das charakteristische Polynom einer Dreiecksmatrix A ist genau $p_A(t) = det(A - tE)$ also die Determinante der Dreiecksmatrix mit Diagonale $a_{ii} - t \Rightarrow$

$$p_A(t) = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\cdots(a_{nn} - t).$$