Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 11.4.2008

Lineare Algebra II

2. Tutorium

(T 6) Normale Matrizen

(a) Wiederholen Sie die Definitionen aus der Vorlesung: Wie sind normale lineare Operatoren definiert? Was versteht man unter einer normalen Matrix?

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in M_n(\mathbb{C})$ durch unitäre Matrizen diagonalisierbar, so gilt

$$A^*A = AA^*.$$

(c) Machen Sie sich klar, dass diese Eigenschaft erfüllt wird von orthogonalen Matrizen, von symmetrischen Matrizen, von unitären Matrizen und von hermiteschen Matrizen.

(T 7)

Sei $\big(V, \langle,\rangle\big)$ ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und A eine normale Matrix. Sei weiterhin $v \in V$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Beweisen Sie, dass v auch zu A^* ein Eigenvektor ist, der zugehörigem Eigenwert ist $\overline{\lambda}$.
(Hinweis: *Berechnen Sie die Norm von* $A^*v - \overline{\lambda}v$).

(T 8) Spektralsatz für normale Operatoren

Sei V ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum mit einer positiv definiten hermiteschen Form $\langle\, ,\, \rangle$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es zu jedem normalen lineare Operator auf V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren gibt.

Sei also f ein normaler linearer Operator $f : V \to V$.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f und $v \in V$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Zeigen Sie: Das orthogonale Komplement $(\mathbb{C}v)^\perp$ ist ein f-invarianter Teilraum.

(b) Zeigen Sie: V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.
(Hinweis: *Vollständige Induktion nach der Dimension*)

(c) Formulieren Sie den eben gezeigten Spektralsatz auch für normale Matrizen.

(T 9) Simultane Diagonalisierung

Sei $\big(V, \langle\, ,\, \rangle\big)$ ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Seien $f_1, \dots, f_m$ normale lineare Operatoren auf V, die paarweise miteinander vertauschbar sind, d.h. $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für jedes i und jedes j aus $\{1, \dots, m\}$.

Es soll folgender Satz bewiesen werden: Es gibt eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ von V aus *simultanen Eigenvektoren*, d.h. es es gibt komplexe Zahlen λ_{ij} für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$, so dass gilt

$$f_i(e_j) = \lambda_{ij} e_j,$$

für jedes i und j.

(a) Sei λ ein Eigenwert zu f_1 und

$$V_\lambda(f_1) = \{v \in V;\ f_1(v) = \lambda v\}$$

der zugehörige Eigenraum. Zeigen Sie zunächst, dass

$$f_i\left(V_\lambda(f_1)\right) \subseteq V_\lambda(f_1).$$

(b) Es seien λ und μ zwei unterschiedliche Eigenwerte zu f_1. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenräume aufeinander senkrecht stehen.

(c) Nun beweisen Sie die Existenz einer Basis von V mit den gewünschten Eigenschaften. (Hinweis: *Induktion*)

(T 10) Diagonalisierung von Matrizen endlicher Ordnung

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit der Eigenschaft $A^m = E$ für eine natürliche Zahl m (Man sagt dann A ist von *endlicher Ordnung*).

(a) Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Weiterhin sei

$$[v, w] = \sum_{j=1}^{m} \left\langle A^j v, A^j w \right\rangle \quad \text{für } v, w \in \mathbb{C}^n.$$

Beweisen Sie, dass $[\ ,\ ]$ ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie: A ist diagonalisierbar.
(Hinweis: Weisen Sie nach, dass A unitär bezüglich $[\ ,\ ]$ ist.)